Taurida National V. Vernadsky University
Branch of Moscow State University in Sevastopol
Crimea Scientific Center of Ukrainian NAS
Crimea Mathematical Foundation
Crimea Academy of Sciences

International Conference
Международная конференция

KROMSH-2011

The Twenty Second Crimea Autumn Mathematical School
Двадцать Вторая Крымская Осенняя Математическая Школа

BOOK OF ABSTRACTS

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Crimea, Laspi-Batiliman, September 17-29

2011

www.kromsh.info

Крымская Осенняя Математическая Школа (КРОМШ-2011).
Crimean Autumn Mathematical School (KROMSH-2011).
Двадцать вторая ежегодная международная конференция. Тезисы докладов. –
Симферополь: издательство КНЦ НАНУ, 2011. – 72 с.

Организационный комитет:

Программный комитет:

Редакционный совет:

Представление ядра оператора свертки на классах ультрадифференцируемых функций в виде пространства степенных рядов

Абанина Д. А.

Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия),
Южный математический институт (Владикавказ, Россия)

Рассматривается оператор свертки на классах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на конечном интервале. Установлено, что в его ядре имеется экспоненциально-полиномиальный базис. Получено изоморфное описание ядра в виде пространства степенных рядов конечного типа.

Полнота системы корневых векторов для систем первого порядка в пространстве вектор-функций

Агибалова А. В.

Донецкий национальный университет (Украина)

В пространстве $L^2([0,1];\mathbb{C}^n) := L^2[0,1]\otimes\mathbb{C}^n$ рассмотрим 2×2-систему типа Дирака

$$-iBy' + Q(x)y = \lambda y, \qquad y = \mathrm{col}(y_1, y_2), \qquad x\in[0,1], \tag{1}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad a\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \quad \text{и} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12} \\ Q_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{12}(x), Q_{21}(x)\in L^2[0,1]. \tag{2}$$

К системе (1) присоединим граничные условия

$$\begin{aligned} &U_1(y) := y_1(0) = 0, \\ &U_2(y) := a_{22}y_2(0) + a_{23}y_1(1) + a_{24}y_2(1) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

В терминах потенциальной матрицы Q и коэффициентов граничных условий (3) получены достаточные условия полноты системы собственных и присоединённых функций граничной задачи (1)–(3). Работа основывается на совместной работе М. М. Маламуда и Л. Л. Оридороги.

Информационные технологии как инструмент повышения функционально-маркетинговой эффективности и качества управления процессами на региональном рынке труда

Азарнова Т. В.

Воронежский государственный университет (Россия)

Рынок труда это важнейшая система отношений, норм и институтов в региональной социально-экономической системе. На основании выполненных автором исследований созданы модели, алгоритмы и информационные технологии, применение которых в реальной практике управления рынком труда и занятостью населения позволит: конструировать и оценивать эффективность различных стратегий повышения качества функционирования рынка труда; повысить эффективность управления программами переподготовки безработных; оптимизировать управление процессом подбора персонала кадровыми агентствами; повысить уровень организации маркетингового взаимодействия субъектов рынка труда и рынка образовательных услуг; повысить уровень информированности субъектов рынка труда.

Некоторые конструкции модулей гладкости в периодическом и непериодическом случаях

Артамонов С. Ю.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

В работе построен модуль непрерывности, соответствующий производной Рисса. Изучены его свойства в пространствах L_p 2π-периодических функций с $1 \leq p \leq +\infty$. Доказаны прямая оценка типа Джексона, обратная оценка типа Бернштейна и эквивалентность K-функционалу, соответствующему производной Рисса.

Проблема регулярности решений вариационных задач с некомпактными невыпуклыми ограничениями, определенными внутри и на границе области, для некоторого класса квадратичных функционалов в $\mathbb{R}^N$

Архипова А. А.

Санкт-Петербургский государственный университет (Россия)

Пусть $\overset{o}{\mathcal{K}}$ некоторая область пространства $\mathbb{R}^N$, $N > 1$, с $\mathcal{C}^2$-гладкой границей $\partial\mathcal{K}$, $\mathcal{K} = \overset{o}{\mathcal{K}} \cup \partial\mathcal{K}$. Пусть Ω - ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$.

Рассмотрим вариационную задачу

$$F[u] = \int_\Omega ((A(x,u)u_x, u_x) + a(x)|u|^2 + f(x)u)\, dx \;\to\; \min_{W_\mathcal{K}}, \tag{1}$$

$$W_\mathcal{K} = \{u \in W_2^1(\Omega; \mathbb{R}^N),\;\; u(x) \in \mathcal{K}, \quad x \in \Omega\}. \tag{2}$$

Здесь $A(x,u)$- положительно определенная $[nN \times nN]$ матрица, a, f - заданные функции, $a(x) \geq a_0 > 0$, функция $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}^N$, $N > 1$, $u = (u^1, ..., u^N)$, $u_x = \{u^k_{x_\alpha}\}^{k \leq N}_{\alpha \leq n}$.

Отметим, что функции u, принадлежащие множеству $W_\mathcal{K}$, обладают свойством: $u(x) \in \mathcal{K}$ почти везде на $\partial\Omega$. Таким образом, рассматривается задача с препятствием, выходящим на границу области.

Мы также рассматриваем задачу с препятствием, выходящим на границу области, в случае, когда препятствие задается условием $u(\Omega) \subset S$, где S гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^N$. Точнее, для функционала (1), (2) мы изучаем регулярность решения вариационной задачи

$$F[u] \;\to \min_{W_S},\;\; W_S = \{u \in W_2^1(\Omega; \mathbb{R}^N),\; u(x) \in S,\;\; x \in \Omega\}. \tag{3}$$

Множества-препятствия $\mathcal{K}$ и S могут быть некомпактными.

Основное требование на матрицу A - ее разделенная структура:

$$A^{\alpha\beta}_{kl}(x,u) = a^{\alpha\beta}(x) b_{kl}(x,u),\;\; \alpha, \beta \leq n,\;\; k, l \leq N, \tag{4}$$

где $a^{\alpha\beta}$ и b_{kl} - положительно определенные матрицы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^N$ соответственно.

Заметим, что разделенная структура (4) в случае $b_{kl} = b_{kl}(u)$, $a = f = 0$, $u|_\gamma = \phi$, $\gamma \subset\subset \partial\Omega$, ϕ - заданная функция, $\phi(\gamma) \subset \mathcal{K}$, (или $\phi(\gamma) \subset \mathcal{S}$) позволяет трактовать рассматриваемые вариационные задачи с ограничениями как задачи о гармонических отображениях (записанные в локальных координатах) в ситуации, когда весь образ покрыт одной картой, при этом на $\partial\Omega \setminus \gamma$ выполняется условие Синьорини.

Доказана частичная регулярность в $\overline{\Omega}$ решений рассматриваемых задач с оценкой хаусдорфовой меры допустимых сингулярных множеств [1,2].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант *по.* 09-01-00729.

Список литературы

[1] Arkhipova A. "Signorini-type problem in $\mathbb{R}^N$ for a class of quadratic functionals vol. Nonlinear Partial Differential Equations and Related Topics, in AMS Translations, to appear in 2010.

[2] Архипова А.А. "Задача с препятствием, выходящим на границу области, для некоторого класса квадратичных функционалов в $\mathbb{R}^N$ ж. Алгебра и Анализ, т.22, (6), (2010), 3-42.

Нелинейные интегральные уравнения с ядрами типа потенциала специального вида

Асхабов С. Н.

Чеченский государственный университет (Грозный, Россия)

В вещественных пространствах Лебега $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$, рассматриваются три основных класса нелинейных интегральных уравнений с весовыми операторами типа потенциала. Методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений. В случае пространства $L_2(-\infty, \infty)$, комбинированием метода монотонных операторов и принципа сжимающих отображений показано, что решения могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа и даны оценки скорости сходимости последовательных приближений. Полученные результаты охватывают, в частности, случай линейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала специального вида.

Задача классификации пары q-коммутирующих нильпотентных операторов.

Ахрамович М. В., Муратов М. А.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Рассматриваются "дикие"и "ручные"задачи классификации, с точностью до преобразования подобия, произвольных наборов линейных операторов $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Доказывается, что задача классификации, с точностью до преобразования подобия, пары нильпотентных операторов (A, B), удовлетворяющих условиям $A^2 = B^3 = 0$, $AB^2 = 0$, и связанных соотношением q-коммутации $AB = qBA$, является "дикой".

Спектральная теория периодического дифференциального оператора 3-го порядка

Баданин А. В.

Северный (Арктический) федеральный университет (Архангельск, Россия)

В работе рассматривается дифференциальный оператор третьего порядка, ассоциированный с уравнением Буссинеска на окружности. Спектр заполняет вещественную ось и при высоких энергиях имеет кратность 1. Вычисляются высокоэнергетические асимптотики периодических собственных значений. Исследуется спектр в случае малых коэффициентов. Работа выполнена совместно с Е.Л.Коротяевым, С.-Петербургский государственный университет.

Ближайшие и наиболее удаленные точки множеств[1]

Балашов М. В.

ГОУ ВПО Московский физико-технический институт (Россия)

При решении многих задач аппроксимации и условной оптимизации используется оператор метрической проекции точки на множество, который заданной точке ставит в соответствие ближайшую к ней точку заданного множества [1, 2]. Если заданное множество замкнуто, но не выпукло, то метрическая проекция точки может быть не единственной, а в бесконечномерном случае и не существовать. Аналогичные вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости от параметров возникают и про наиболее удаленные точки (выпуклого) замкнутого множества от данной точки пространства [3]. Основные вопросы про ближайшие и наиболее удаленные точки (выпуклых) множеств — существование и непрерывная зависимость от параметров задачи, оценка модуля непрерывности. Основной результат про ближайщие [4] и наиболее удаленные [5] точки в равномерно выпуклых пространствах — существование для всякого ограниченного замкнутого множества всюду плотного подмножества G_δ-типа, на котором существует непрерывно зависящая от точек указанного G_δ-множества единственная ближайшая/наиболее удаленная точка данного замкнутого ограниченного множества.

В докладе будут обсуждаться свойства множества, гарантирующие существование и единственность ближайшей/наиболее удаленной точки для всех точек из некоторой окрестности/вне некоторой окрестности указанного множества. Работы [6]—[13] посвящены указанной проблематике.

Список литературы

[1] *Л. П. Власов,* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах, УМН, 28:6(174) (1973), 3-66.

[2] *В. С. Балаганский, Л. П. Власов,* Проблема выпуклости чебышёвских множеств, *УМН 51:6 (1996), 125-188.*

[3] *И. Экланд, Р. Темам,* Выпуклый анализ и вариационные проблемы, М.: Мир, 1979. Приложение II.

[4] *С. Б. Стечкин,* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах, Rev. Roum. Math. Pur. et Appl. 8(1) (1963), 5-18.

[5] *M. Edelstein,* Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces, Israel J. Math. 4(3) (1966), 171-176.

[6] *J.-P. Vial,* Strong and weak convexity of sets and functions, Math. Oper. Res. 8:2 (1983), 231–259.

[7] *J. M. Borwein, H. M. Strojwas,* Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space, I. Theory, Canad. J. Math. 38 (1986), 431-452.

[8] *F. Bernard, L. Thibault, N. Zlateva,* Characterization of proximal regular sets in super reflexive Banach spaces, J. Convex Anal 13:3-4 (2006), 525-559.

[9] *F. H. Clarke, R. J. Stern, P. R. Wolenski,* Proximal smoothness and lower–C^2 property, J. Convex Anal. 2:1-2 (1995), 117-144.

[10] *М. В. Балашов, Г. Е. Иванов,* Об удаленных точках множеств, Матем. заметки, 80:2 (2006), 163-170.

[11] *M. V. Balashov, G. E. Ivanov,* Weakly convex and proximally smooth sets in Banach spaces, Izvestiya: Mathematics, 73(3) (2009), 455-499.

[12] *Г. Е. Иванов,* Наиболее удаленные точки и сильная выпуклость множеств, Матем. заметки, 87:3 (2010), 382-395.

[13] *M. V. Balashov, D. Repovš,* Weakly convex sets and modulus of nonconvexity, J. Math. Anal. Appl. 371 (2010), 113-127.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00139-а, программой "Развитие научного потенциала высшей школы"2.1.1/11133 и ФЦП "Кадры"программа 1.2.1.

Разрешимость задачи Дирихле для дифференциальных уравнений бесконечного порядка с подчиненными членами

Балашова Г. С.

Московский Энергетический Институт (Технический Университет) (Россия)

В работе исследована разрешимость задачи Дирихле для уравнений бесконечного порядка, содержащего подчинённые члены, в ограниченной многомерной области. Полученные ранее теоремы вложения для пространств Соболева бесконечного порядка, определённых на многомерных областях, позволили из 2-х дифференциальных операторов бесконечного порядка выделить главный оператор и получить условия разрешимости указанной задаче Дирихле. Для задачи Дирихле в случае линейного дифференциальнного уравнения бесконечного порядка, содержащего подчинённые члены, установлена Фредгольмова разрешимость. Предложенная теория позволила установить разрешимость ряда задач, которые ранее известными методами установить не удавалось. Полученные результаты проиллюстрированы примерами.

Об асимптотическом поведении полугрупп операторов

Баскаков А. Г.

Воронежский государственный университет (Россия)

Рассматривается сильно непрерывная полугруппа сжимающих операторов, действующих в банаховом пространстве. Получены результаты об асимптотическом её поведении. Вводится класс почти периодических на бесконечности функций и доказывается ряд утверждений об условиях почти периодичности на бесконечности решений дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами.

Динамика диссипативных структур в параболической задаче с отражением пространственных переменных

Белан Е. П

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
(Симферополь, Украина)

На симметричном относительно начала координат квадрате рассматривается нелинейное скалярное параболическое уравнение с преобразованием отражения пространственных переменных и краевыми условиями Неймана. Рассматриваются вопросы существования, устойчивости и асимптотической формы её пространственно неоднородных стационарных решений, рождающихся из пространственно однородного стационарного решения. В качестве бифуркационного принят коэффициент диффузии. Исследуется динамика стационарных структур при условии, что коэффициент диффузии стремится к нулю.

Субъективный характер риска в одной экономической задаче

Бельских Ю. А.

ГОУ ВПО “Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности” (Москва, Россия)

Модель о диверсификации вклада по рублевому и валютному депозитам представлена в виде однокритериальной задачи принятия решения при неопределенности (не определен курс валюты в конце года). Учитываются исход (значение критерия) и его риск (по Сэвиджу). Выделено три возможных подхода к принятию решения: первый – ориентация только на исход, второй – ориентация только на риск и, наконец, третий – учет как исхода, так и риска. Во всех трех случаях найден явный вид гарантированного решения. Уточнен смысл гарантии в каждом варианте.

Секториальные Стилтьесовские функции и их реализация L-системами

Белый С. В.

Troy University (USA)

Мы рассматриваем класс т.н. секториальных Стилтьесовских функций. Показывается, что функции принадлежащие этому классу могут быть реализованы как импедансные функции сингулярных L-систем с секториальным основным оператором. Также приводятся дополнительные условия на функцию из этого класса, для того чтобы основной оператор реализующей L-системы имел точный угол секториальности α. Далее эти результаты применяются к L-системе, построенной на основе несамосопряженного оператора Шрёдингера.

Обратная задача для уравнения Грэда — Шафранова

Безродных С. И., Власов В. И.

ВЦ РАН, ГАИШ МГУ (Москва, Россия)

Уравнение Грэда — Шафранова с аффинной правой частью $\Delta u(x) = au(x)+b$ рассматривается в (отличных от круга) плоских односвязных областях G с кусочно $C^{3,\alpha}$–гладкой границей Γ, на которой задано однородное условие Дирихле и нелокальное условие $\int_\Gamma \partial_\nu u(x)\, ds = 1$, где ds — элемент длины дуги Γ, а ∂_ν — производная по внешней нормали к Γ. Последнее условие связывает параметры a и b уравнения (явно выписываемой) зависимостью $b = b(a)$ и, тем самым, делает рассматриваемую краевую задачу зависящей лишь от параметра a. Обратная задача для рассматриваемого уравнения заключается в нахождении параметра a по информации о нормальной производной $\partial_\nu u(x)$. Эти прямая и обратная задачи изучались, в частности, в [1] в связи с физическими приложениями. В настоящей работе установлено, что этот параметр может быть найден по значению нормальной производной $\partial_\nu u(x)$ в любой одной точке x из специального подмножества $\widetilde{\Gamma}$ границы Γ, и для этого необходимо и достаточно, чтобы значение $\partial_\nu u(x)$ принадлежало (зависящему от $x \in \widetilde{\Gamma}$) полуинтервалу $\mathscr{J}_x$. Предложен метод нахождения параметра a, включающий способ отыскания множества $\widetilde{\Gamma}$ и полуинтервала $\mathscr{J}_x$. Эти результаты получены с помощью метода мультиполей [2], обеспечивающего высокоточное вычисление нормальной производной $\partial_\nu u(x)$, и найденных с использованием [1] асимптотик при $a \to \infty$ для $\partial_\nu u(x)$ и $\frac{d}{da}\,\partial_\nu u(x)$, $x \in \Gamma$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-00837), Программы ОМН РАН "Современные проблемы теоретической математики", проект "Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики" и Программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

Список литературы

[1] Demidov A.S., Moussaoui M. An inverse problem originating from magnetohydrodynamics // Inverse Problems. 2004. Vol. 20. P. 137–154.
[2] Власов В.И. Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: ВЦ АН СССР, 1987.

Непрерывность дифференцирований на собственно бесконечных $*$-алгебрах τ-измеримых операторов

Бер А. Ф.
DCF Technologies Ltd (Ташкент, Узбекистан)

Теорема 1. *Если $\mathcal{M}$ - собственно бесконечная алгебра фон Неймана, τ - точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $S(\mathcal{M},\tau)$ - алгебра τ-измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$, то любое дифференцирование $\delta : S(\mathcal{M},\tau) \to S(\mathcal{M},\tau)$ является непрерывным в топологии t_τ сходимости по мере.*

Спектральные свойства разностных отношений в весовых пространствах последовательностей

Бесаева С. В.
Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова (Владикавказ, Россия)

Приводится описание спектра линейного разностного отношения $\mathcal{K}_E \in LR(l^p_\alpha(\mathbb{Z}_+, X))$, определяемого следующим образом

$$\mathcal{K}_E = \{(x,y) \in l^p_\alpha \times l^p_\alpha \ : y(n) = Bx(n-1),\ n \geqslant 1,\ y(0) \in E\},$$

где $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, X — конечномерное линейное нормированное пространство, B — линейный оператор, действующий на X, $l^p_\alpha(\mathbb{Z}_+, X) = l^p_\alpha$ — банахово пространство состоящее из последовательностей $x : \mathbb{Z}_+ \to X$ векторов, принадлежащих X, с нормой $\|x\| = \|x\|_{p,\alpha} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)}\right)^p\right)^{1/p}$, $p \in [1,\infty)$, и ограниченных относительно $\alpha : \|x\| = \|x\|_{\infty,\alpha} = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)}$, $p = \infty$.

Характеристический функционал дифференциального уравнения диффузии со случайными коэффициентами

Беседина Т. В.
Воронежский государственный университет (Россия)

Рассматривается начальная задача для трехмерного уравнения диффузии, коэффициенты которого являются случайными процессами. Характеристическим функционалом дифференциального уравнения назовем характеристический функционал коэффициентов и решения этого уравнения. Находится разложение характеристического функционала уравнения диффузии в степенной ряд. Из коэффициентов этого ряда получаются явные формулы моментной функции n–го порядка решения исходной задачи.

Спектральная теория разностных операторов в весовых пространствах

Бичегкуев М. С.

Северо-Осетинский государственный университет (Владикавказ, Россия)

Описывается спектр разностных операторов в весовых пространствах векторных (односторонних, двусторонних) последовательностей при минимальных ограничениях на весовую функцию, а также исследование обратимости одного класса разностных операторов. Приводятся приложения к исследованию спектра дифференциальных операторов, определяющихся с помощью семейства эволюционнных операторов, действующих в весовых функциональных пространствах. Суть основного подхода состоит в использовании преобразования подобия исследуемого оператора в оператор, действующий в "невесовом"пространстве и применении спектральной теории линейных отношений.

Существенно бесконечномерные уравнения

Богданский Ю. В.

Национальный технический университет Украины "КПИ"(Киев, Украина)

Решения дифференциальных уравнений для функций бесконечномерного аргумента обладают свойствами, совершенно не характерными для конечномерных аналогов этих уравнений. В лекции будет рассмотрен ряд задач для таких уравнений и приведены специфические свойства их решений.

Многообразие операторов с фиксированной жордановой структурой

Бондарь А. А.

Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко (Украина)

В работе [1] В.И. Арнольдом впервые рассмотрено многообразие симметричных вещественных матриц с фиксированными кратностями собственных значений. Результаты Арнольда были обобщены для случая компактных вещественных самосопряжённых операторов группой японских математиков в статье [2]. Ими был введен в рассмотрение специальный локальный диффеоморфизм, который "распрямляет" многообразие Арнольда. Дальнейшее исследование свойств указанного диффеоморфизма осуществлено Я.М. Дымарским в работе [3]. В докладе будет описана гладкая структура подмногообразий компактных операторов общего вида, у которых фиксирована структура Жордановых клеток выделенных собственных значений. Исследование опирается на результаты статьи В.И. Арнольда [4].

Список литературы

[1] *Арнольд В.И.* Моды и квазимоды // Функц. анализ и его прилож. – 1972. –6, №2,– С.94–101.

[2] *Fujiwara D., Tanikawa M., Yukita Sh.* The spectrum of Laplasian and Boundary Perturbation I // Proc. Jap. Acad. Ser. A. – 1978. – 54, No 4.– P. 87–91.

[3] *Дымарский Я.М.* Метод многообразий в теории собственных векторов нелинейных операторов. // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2007. – Т.24. – С. 3–159.

[4] *Арнольд В.И.* О матрицах, зависящих от параметров. // Успехи математических наук. – 1971. – T.XXVI, вып. 2 (158. – С. 101–114)

О линейных отношениях, порожденных интегральным уравнением с неванлинновской мерой

Брук В. М.

Саратовский государственный технический университет (Россия)

В конечномерном гильбертовом пространстве на конечном или бесконечном интервале рассматривается интегральное уравнение с неванлинновской операторной мерой. Определяются семейства максимальных и минимальных отношений, порожденных этим уравнением. Доказывается, что эти семейства голоморфны. Дается описание непрерывно обратимых сужений максимального отношения. Результаты применяются для доказательства существования характеристического оператора и для доказательства постоянства дефектных чисел некоторых интегральных и дифференциальных операторов.

Бифуркация решений системы ДУ как фазовые переходы 1-го и 2-го рода

Вальков А. Ю., Аксенова Е. А., Романов В. П.

Санкт-Петербургский Торгово-Экономический Институт,
Санкт-Петербургский Государственный Университет (Россия)

Рассмотрена задача о влиянии внешнего поля на структуру жидкого кристалла в твист-ячейке. Получено аналитическое решение системы нелинейных ОДУ равновесия Эйлера-Лагранжа для данной системы. Точка бифуркации для однородного состояния соответствует классическому эффекту Фредерикса. Прямым вариационным методом показано, что кроме обычных точек бифуркации системы ОДУ в данной задаче возникает новый тип особых точек. При использовании концепции фазового перехода (ФП) точкам бифуркации соответствуют ФП 2-го рода, а новая особая точка – ФП 1-го рода.

Функция Грина поля смещений среды в упругом слоистом полупространстве

Вальков А. Ю., Кузьмин В. Л., Никитина М. А., Романов В. П.

Санкт-Петербургский Торгово-Экономический Институт,
Санкт-Петербургский Государственный Университет (Россия)

Рассмотрена задача о поле точечного гармонического источника (функция Грина) в упругом изотропном полупространстве (задача Лэмба). Получено аналитическое выражение для тензорной функции Грина в представлении нормальных мод. Решение учитывает объемные (одну продольную и две поперечные) моды, поверхностные волны Релея, Лява и Стонли, а также головные (боковые) волны. Рассматривается практическое применение полученного решения для геофизических задач, в частности для построения построения синтетических сейсмограмм и моделей микро-землетрясений на острове Валаам.

Об описании движения квантовой частицы в классическом калибровочном поле на языке стохастической механики в пространстве Минковского

Гликлих Ю. Е., Винокурова Н. В.

Воронежский государственный университет (Россия),
Курский государственный университет (Россия)

Вводится и исследуется уравнение типа Ньютона-Нельсона на векторном расслоении над пространством Минковского, которое интерпретируется как описание движения квантовой частицы в классическом калибровочном поле на языке стохастической механики. Для частного случая группы симметрий $U(1)$ исследуется связь с квантовой электродинамикой.

Спектральный анализ интегродифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве

Власов В. В.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (Россия)

Спектральная задача Стефана с классическим условием общего вида

Войтицкий В. И.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Рассматривается спектральная задача, возникающая после линеаризации двухфазной задачи Стефана с классическим условием общего вида на границе раздела фаз. Установлено, что в зависимости от параметров, задача может быть самосопряженной или несамосопряженной. При этом спектр задачи состоит из изолированных конечнократных собственных значений, которые могут быть либо положительными, либо лежащими в угле $-\varepsilon < \arg\lambda_n < \varepsilon$ с произвольным $\varepsilon > 0$ (за исключением, быть может, конечного их числа). Система соответствующих собственных элементов образует ортонормированный базис либо базис Абеля-Лидского в некотором гильбертовом пространстве.

Асимптотика спектра одной гидродинамической задачи

Вронский Б. М.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Рассмотрена задача о нормальных колебаниях частично-диссипативной гидросистемы. С помощью ортогонального проектирования исходная задача сведена к исследованию свойств спектра для некоторого операторного пучка в ортогональной сумме функциональных гильбертовых пространств, естественным образом связанных с исследуемой задачей. Доказано существование трех ветвей конечно-кратных собственных значений с предельными точками в нуле и на бесконечности, получены соответствующие асимптотические формулы для частот нормальных колебаний. Доказана теорема о глобальной полноте корневых векторов.

Предложение и уровень желаемого актива как способ регулирования цен

Высокос М. И.

ГОУ ВПО "Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности"(Москва, Россия)

Рассматривается математическая модель функционирования производства, причем динамика процесса описывается системой из двух разностных линейных уравнений. Управляющее воздействие первого игрока – предложение на рынке сбыта, у второго – уровень желаемого актива. В результате математическая модель представлена двухшаговой позиционной линейно-квадратичной игрой двух лиц. В качестве решения выбрана ситуация равновесия по Нэшу. Используя подходящую модификацию метода динамического программирования удалось найти явный вид такого равновесного решения.

К проблеме малых колебаний гидросистемы "жидкость-газ"

Газиев Э. Л.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
(Симферополь, Украина)

Для задачи о малых движениях системы "идеальная капиллярная жидкость–баротропный газ" в осесимметричном сосуде (в терминах потенциалов смещений)

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2} = a^2\Delta_0\Phi_2 + F_2(t,x),\ \Delta_0\Phi_2 := \rho_{2,0}^{-1}\mathrm{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_2)\ (\text{в } \Omega_2) \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} =: \zeta\ (\text{на } \Gamma), \tag{2}$$

$$\int\limits_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \int\limits_\Gamma \Phi_1 d\Gamma = 0, \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}\Phi_2 d\Omega_2 = 0, \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}F_2 d\Omega_2 = 0, \tag{3}$$

$$\rho_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}P_\Gamma\left(\rho_{2,0}\Phi_2\right) + B_\sigma\zeta = \rho_1 F_1 - P_\Gamma\left(\rho_{2,0}F_2\right)\ (\text{на } \Gamma), \tag{4}$$

$$B_\sigma := P_\Gamma\mathcal{L}_\sigma P_\Gamma, \quad \mathcal{L}_\sigma\zeta := -\sigma\Delta_\Gamma\zeta + a(x)\zeta \ \text{ на } \Gamma, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial\nu} + \chi\zeta = 0, \quad x \in \partial\Gamma, \tag{5}$$

$$\Phi_1(0,x) = \Phi_1^0(x),\ \Phi_2(0,x) = \Phi_2^0(x),\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}(0,x) = \Phi_1^1(x),\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial t}(0,x) = \Phi_2^1(x), \tag{6}$$

$$\Phi_1 \in L_2(\Omega_1), \quad \Phi_2 \in L_2(\Omega_2, \rho_{2,0}), \quad \zeta \in L_2(\Gamma),$$

рассматривается ассоциированная абстрактная спектральная задача $\lambda\mathcal{A}y = \mathcal{B}y$, где

$$\lambda = \omega^2,\ \mathcal{A} := \begin{pmatrix} I & Q \\ Q^* & C \end{pmatrix},\ \mathcal{B} := \begin{pmatrix} a^2 A & 0 \\ 0 & B_\sigma \end{pmatrix},\ y := \begin{pmatrix} \widetilde{\eta} \\ \zeta \end{pmatrix} \in \mathcal{H} = H \oplus H_0. \tag{7}$$

Доказаны следующие свойства операторов, входящих в (7):

1. Если граница $\partial\Gamma$ является достаточно гладкой, то оператор B_σ с областью определения $\mathcal{D}(B_\sigma) := \left\{\zeta \in H^2(\Gamma) \cap H_0 :\ \frac{\partial\zeta}{\partial\nu} + \chi\zeta = 0 \ (\text{на } \ \partial\Gamma)\right\}$, в пространстве H_0 является самосопряженным и ограниченным снизу.

2. Оператор $A :\ H \to H \gg 0$, обратный оператор A^{-1} компактный и имеет дискретный спектр с предельной точкой на $+\infty$.

3. Операторы $Q :\ H_0 \to H$ и $Q^* :\ H \to H_0$ — взаимно сопряженные компактные.

4. Оператор $C : H_0 \to H_0$ — положительный компактный.

5. $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – положительный компактный оператор.

Теорема. *Если для оператора B_σ выполнено условие*

$$-\infty < \gamma \leqslant \lambda_1(B_\sigma) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_\varkappa(B_\sigma) < 0 = \lambda_{\varkappa+1}(B_\sigma) = \ldots = \lambda_{\varkappa+q}(B_\sigma) <$$
$$< \lambda_{\varkappa+q+1}(B_\sigma) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k(B_\sigma) \leqslant \ldots, \quad \varkappa \geqslant 1, \quad q \geqslant 0. \tag{8}$$

то задача (7) имеет ровно $\varkappa$ отрицательных и q нулевых собственных значений (с учетом их кратностей). Остальные собственные значения $\{\lambda_k\}_{k=\varkappa+1}^\infty$ задачи (7) положительны с предельной точкой на $+\infty$.

Следствие (обращение теоремы Лагранжа). *Если для оператора потенциальной энергии B_σ имеет место свойство (8) с постоянными $\varkappa \geqslant 1$ и $q \geqslant 0$,* *то существует, по крайней мере, одно решение задачи* (1), *экспоненциально возрастающее по времени.*

Список литературы

[1] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

О существовании решений дифференциальных включений с текущими скоростями

Гликлих Ю. Е., Макарова А. В.

Воронежский государственный университет (Россия)

Текущая скорость – это симметрическая производная в среднем случайного процесса, введенная Э. Нельсоном. Она является естественным аналогом обычной физической скорости детерминированной кривой. Ранее было показано, что если заданы текущая скорость и так называемая квадратичная производная в среднем (дающая информацию о коэффициенте диффузии процесса), то при некоторых естественных условиях удается построить процесс, имеющий указанную текущую скорость и квадратичную производную. Мы рассматриваем случай, когда заданы многозначные текущая скорость и квадратичная производная, т.е. уравнение. превращается во включение с текущими скоростями. Обсуждаются физические задачи, приводящие к указанным включениям. Выделен класс включений, для которого удается доказать существование решения.

О разрешимости сингулярных уравнений второго порядка в банаховом пространстве

Глушак А. В.

Белгородский госуниверситет (Россия)

В банаховом пространстве рассматривается уравнение Мальмстена

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) + \frac{l}{t^2}u(t) = t^m Au(t), \qquad t > 0,$$

имеющее сингулярные особенности в коэффициентах. В частности, при $l = m = 0$ уравнение Мальмстена превращается в уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Приводятся постановки начальных условий и описывается класс операторов A, обеспечивающие однозначную разрешимость соответствующих начальных задач для уравнения Мальмстена.

О спектре операторов с разбегающимися возмущениями

Головина А. М.

Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы (Уфа, Россия)

Рассматривается эллиптический оператор с разбегающимися возмущениями во всём пространстве. Исследуется поведение спектра данного возмущённого оператора. Доказаны теоремы сходимости, а также построены асимптотические разложения собственных значений и соответствующих им собственных функций.

Управление социальной системой на основе данных многопараметрического анализа

Гончарова Г. А., Гарбуз Е. В.

Региональный центр оценки качества образования (Саратов, Россия)

На основе анализа данных разного уровня достоверности и качества предлагается методика принятия управленческих решений в области управления социальной системой (на примере системы образования). Исследуются различные уровни системы образования (дошкольное, среднее, высшее) и даются рекомендации для принятия управленческих решений на различных уровнях управления образованием: учреждение, муниципалитет, регион. Анализируется эффективность реализации рекомендаций на конкретных примерах.

Асимптотическое поведение решений системы дифференциальных уравнений в критическом случае устойчивости по формам третьего порядка

Грушковская В. В., Зуев А. Л.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины (Донецк, Украина)

Известно, что для линейных автономных систем дифференциальных уравнений свойства экспоненциальной и асимптотической устойчивости эквивалентны. Для систем, определяемых однородными векторными полями, асимптотические оценки решений по степеням t были получены Н. Н. Красовским [1] и В. И. Зубовым [2].

Данное сообщение посвящено исследованию критического случая теории устойчивости в предположении, что матрица линейного приближения системы имеет n пар чисто мнимых корней. Для получения асимптотических оценок решений нелинейной системы использован принцип сведения с явным построением функции Ляпунова для укороченной подсистемы на центральном многообразии. При выполнении критерия устойчивости А. М. Молчанова [3] построена функция Ляпунова для исходной системы и случае уравнение сравнения. С помощью этого результата доказано асимптотическое представление нормы решений вида $O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)$ при $t \to +\infty$ в случае устойчивости по формам третьего порядка.

Список литературы

[1] *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. - М.: Физматгиз, 1959. - 212 с.

[2] *Зубов В. И.* Методы А. М. Ляпунова и их применение. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1957. – 263 с.

[3] *Молчанов А. М.* Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения // Докл. АН СССР. - 1961. - Т. 141. - N 1. - С. 24-27.

Эффективность анализа формальных понятий в задачах классификации

Гуров С. И., Онищенко

МГУ им. М.В.Ломоносова (Москва, Россия)

В последнее время предпринимаются попытки использования анализа формальных понятий (АФП) для решения задач классификации (распознавания образов). В работе на нескольких примерах исследуется эффективность данного подхода.

Данные для обучения представляются множествами положительных, отрицательных и недоопределённых примеров относительно некоторого целевого признака и описываются с помощью трех формальных контекстов.Был составлен и запрограммирован алгоритм решения задач классификации по прямому и модифицированному методу АФП. Первый показал крайне высокий процент отказов от классификации, второй — несколько исправил этот недостаток. Также был запрограммирован метод бикластеризации (развитие АФП). В докладе приведена таблица результатов решения восьми задач классификации последним методом. Сделаны выводы о применимости подходов на основе АФП к решению задач классификации: без модификации и/или глубокой предобработки данных эти методы могут использоваться лишь на этапах предварительной классификации; при порождении гипотез полезными является учёт специфики конкретной предметной области и «подстройка» под неё гипотез и алгоритмов; перспективным направлением является построение на основе АФП методов преобразования признакового пространства, в т. ч. с использованием оценок компактности данных.

Спектральная задача для обыкновенного дифференциального оператора с интегральными условиями, содержащими производные искомой функции

Даровская К. А.

Российский университет дружбы народов (Москва, Россия)

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка со спектральным параметром и интегральными условиями, содержащими производные искомой функции. Доказана фредгольмовость соответствующих операторов, получено достаточное условие для дискретности и секториальной структуры спектра оператора с однородными нелокальными условиями.

О необходимом и достаточном условиях стабилизации решения задачи Дирихле для параболического уравнения[1]

Денисов В. Н., Мартынова А. А.

Российский университет дружбы народов (Москва, Россия)

Рассмотрим в цилиндре $Q = D \times (0, \infty)$ задачу Дирихле

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{N} a_{ik}(x,t) u_{x_i x_k} - u_t = 0 \text{ в } Q, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), u|_S = 0, S = \partial D \times (0, \infty)$$

с ограниченной начальной функцией $u_0(x)$ для равномерно параболического оператора L с измеримыми коэффициентами, где D - область в $\mathbb{R}^N$, $S = \partial D x(0, \infty)$ - боковая поверхность цилиндра Q.

Следуя [1], положим

$$\sup_Q \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) = M_1, \quad \inf_Q \min_{|\xi|=1} \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t)\xi_i\xi_k = \alpha_1,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 09-01-00446

$$\inf_Q \sum_{i=1}^N a_{ii}(x,t) = M_2, \quad \sup_Q \max_{|\xi|=1} \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x,t)\xi_i\xi_k = \alpha_2.$$

Нас интересуют вопросы о поточечной стабилизации к нулю решения задачи (1), т.е. существование предела

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \quad \forall x \in D.$$

Введем для $s > 0$, $\beta > 0$ ядро

$$F_{s,\beta}(x,t) = t^{-s} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\beta t}\right) \text{ при } t > 0, \quad F_{s,\beta}(x,t) = 0 \text{ при } t \le 0$$

и, следуя [1], определим тепловую (s,β) емкость $\gamma_{s,\beta}(E)$ компакта $E \subset \mathbb{R}^{N+1}$, полагая

$$\gamma_{s,\beta}(E) = \sup \mu(E),$$

где $\mu(E)$ - совокупность мер μ, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_E F_{s,\beta}(x-y,t-\tau)d\mu(y,\tau) \le 1 \text{ при } (x,t) \notin E.$$

Пусть $Q(t) = B_t \times (0,t^2)$, где B_t - шар с центром в точке x_0 радиуса $t:\ B_t \equiv \{x:\ |x-x_0| < t\}$.

Теорема 1. *Если решение задачи (1) стабилизируется к нулю, то расходится интеграл*

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \gamma_{s,\beta}(t)t^{-2s-1}dt = +\infty,\ t_0 > 0 \tag{2}$$

где $\beta = \alpha_2,\ s = \frac{M_1}{2\beta},\ \gamma_{s,\beta}(t) = \gamma_{s,\beta}(\overline{Q}_t \backslash Q)$.

Теорема 2. *Если расходится интеграл (2) при* $\beta = \alpha_1,\ s = \frac{M_1}{2\beta}$, *то решение задачи (1) стабилизируется к нулю.*

В теоремах 1 и 2 точка x_0 может быть любой, ибо сходимость или расходимость интеграла (2) не зависит от её выбора.

Следствие 1. *Если в (1)* $Lu = \Delta u - u_t$, *то в этом случае при* $N \ge 3$ $s_1 = s_2 = \frac{N}{2}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, *условия теорем 1 и 2 совпадают, и мы получаем критерий [2] стабилизации решения задачи (1).*

Отметим также, что

$$c_2 t^2 cap(\overline{B}_t \backslash D) \le \gamma_{\frac{N}{2},1}(\overline{Q} \backslash Q) \le c_1 t^2 cap(\overline{B}_t \backslash D),$$

где $cap(E)$ - винеровская емкость компакта E.

Список литературы

[1] Е.М. Ландис. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типа. М.: Наука. 1971.

[2] В.Н. Денисов. Необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи Дирихле для уравнения теплопроводности. ДАН РАН. 2006. Т. 407. №2. С. 163-166.

Глобальная разрешимость задачи о движении двух несжимаемых капиллярных жидкостей

Денисова И. В., Солонников В. А.
Институт проблем машиноведения РАН (Санкт-Петербург, Россия),
Санкт-Петербургское отделение математического института им. В. А. Стеклова РАН

Рассматривается задача о движении двух несжимаемых жидкостей конечного объёма, одна из которых находится внутри другой. При достаточно малых гладких начальных данных мы доказываем существование решения в анизотропных пространствах Гёльдера при всех $t > 0$. Доказательство основывается на существовании локального по времени решения и его оценках. Опираясь на равномерную экспоненциальную оценку локальных решений, мы показываем, что при достаточно малой начальной скорости и малом отличии начальной поверхности от сферы движение капли в жидкости затухает, а её форма стремится к шару соответствующего радиуса.

О состояниях обратимости дифференциальных операторов с неограниченными периодическими операторными коэффициентами

Диденко В. Б.
Воронежский государственный университет (Россия)

Получены необходимые и достаточные условия для нахождения дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами в определенных состояниях обратимости, таких как непрерывная обратимость, фредгольмовость, замкнутость образа, дополняемость образа, дополняемость ядра, корректность, сюръективность, инъективность.

Неравенства бернштейновского типа для операторов

Дикарев Е. Е.
Воронежский государственный университет (Россия)

Неравенства бернштейновского типа получены для оператора, являющегося генератором группы операторов полиномиального роста.

Квадратичные условия оптимальности для релейно-особых управлений

Дмитрук А. В.
ЦЭМИ РАН (Москва, Россия)

На фиксированном отрезке времени рассматривается задача оптимального управления, линейная по скалярному управлению, которое ограничено по модулю. Изучается экстремаль Понтрягина с простейшим релейно-особым управлением, а именно, сначала управление принимает граничное значение, а затем промежуточное. Предполагается, что функция переключения на первом интервале положительна. Вводится вторая вариация функции Лагранжа, конус критических вариаций, а также квадратичный порядок, содержащий лишь вариации фазовых переменных. С помощью т.н. преобразования Гоха делается переход от второй вариации к новой квадратичной форме, которая может быть невырожденной, т.е. удовлетворять усиленному условию Лежандра относительно некоторого нового управления. Доказано, что неотрицательность и положительная определенность этой новой квадратичной формы на конусе критических вариаций есть необходимое и соответственно достаточное условия слабого и соответственно строгого сильного минимума в задаче. Основной нетривиальный пункт состоит в том, что при вычислении второй вариации не надо варьировать точку переключения управления.

Периодические на бесконечности решения разностных уравнений

Дуплищева А. Ю.
ВГУ ПММ (Воронеж, Россия)

Исследована структура ограниченных решений разностных уравнений.

Некоторые задачи дискретной математики, возникающие в современных приложениях при анализе данных

Дьяконов А. Г.
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Россия)

В последнее время в анализе данных (data mining) возникает большое число новых нестандартных задач. "Нестандартность" связана с огромными массивами информации, специальными форматами её представления, а также ограничениями на алгоритмы решения и требованиями к качеству и формату решений. В докладе сделана попытка систематизировать такие задачи, а также выделить в них позадачи, которые лежат в русле дискретной и вычислительной математики, но пока не достаточно подробно освящены в современных работах. К таким подзадачам относятся: 1) Предсказание связности графа (Link Prediction Problem - вычисление вероятности появления ребра в динамическом графе), 2) Восстановление частично-упорядоченных множеств (по неполной и агрегированной информации о порядках), 3) Нахождение оптимальной метрики в метрическом конусе (в смысле минимизации функционала качества при решении задач классификации методом, основанным на близости). Отметим, что доклад базируется на опыте участия в крупных международных соревнованиях по анализу данных, в том числе, в "ECML/PKDD Discovery Challenge 2011 (VideoLectures.Net Recommender System Challenge)" и "IJCNN Social Network Challenge".

Обратная задача для оператора Лапласа на квантовом графе

Ершова Ю. Ю., Киселев А. В.
Институт математики НАН Украины (Киев, Украина),
СпбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

Для оператора Лапласа на конечном квантовом графе с условиями δ-связанности (δ-coupling) и δ'-связанности (δ'-coupling) рассматривается задача восстановления топологии графа по известному спектру оператора. Работа выполнена при частичной поддержке гранта ГФФИ, проект № 40.1/008.

Гарантированное равновесие в конфликтной задаче

Жаркынбаев С. Ж.
Алматинский университет непрерывного образования (Казахстан)

Гарантированное (по Парето) равновесие в многошаговых конфликтах

Жуковский В. И.

ГОУ ВПО "Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности" (Москва, Россия)

До настоящего времени в качестве принципа формирования гарантированного решения в бескоалиционных играх при неопределенности (БИН) использовался аналог векторной седловой точки. Однако наряду с позитивными свойствами такому подходу присуще и негативное – «теряется нэшевость» гарантированного решения, если только неопределенность не реализует векторный минимум. А в реальных задачах отклонение от такого минимума весьма правдоподобно, ибо о неопределенности известна лишь область возможных значений, а какие-либо вероятностные характеристики зачастую отсутствуют по многим причинам. Поэтому предлагается другой подход к формализации гарантированного решения БИН, основанный на векторном максимине.

Приближенное вычисление мультипликаторов Флоке для периодических решений дифференциально-разностных уравнений

Журавлев Н. Б.

Российский университет дружбы народов (Москва, Россия)

Рассматривается периодическое решение нелинейного автономного дифференциального уравнения с постоянным запаздыванием. Мультипликаторами флоке называются собственные значения оператора монодромии они же являются характеристическими числами линеаризованного уравнения. В отличии от обыкновенных дифференциальных уравнений в случае уравнений с запаздыванием до настоящего времени нет общей схемы для вычисления таких чисел. Предлагаемая модернизация известного ранее метода проще в реализации и может быть применена в случае, когда период исследуемого решения не соизмерим с запаздыванием или даже задан приближенно.

О моделях Ильюшина вязкоупругих тел

Закора Д. А.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Рассматривается задача о колебаниях вязкоупругого (в смысле моделей Ильюшина) тела, занимающего ограниченную область с гладкой границей. Приводится физическая постановка задачи, а также соответствующая ей задача Коши для операторного интегродифференциального уравнения второго порядка. Доказывается теорема о сильной по времени разрешимости сформулированной задачи Коши. Приводится постановка задачи о нормальных колебаниях описанной системы. Доказываются утверждения о некоторых свойствах спектра возникающего операторного пучка. В частности, доказаны утверждения о грубой локализации спектра и его разбиении на существенную и дискретную составляющую. Приводятся асимптотические формулы для некоторых ветвей спектра.

Новая формула для регуляризованных следов

Затицкий П. Б., Назаров А. И., Столяров Д. М.
Санкт-Петербургский государственный университет (Россия)

Для оператора $\mathbb{L}+\mathbb{Q}$, где $\mathbb{L}$ — самосопряженный обыкновенный дифференциальный оператор с чисто дискретным спектром, а $\mathbb{Q}$ – оператор умножения на вещественную функцию q, получены новые формулы регуляризованных следов.

Работа первого и третьего авторов поддержана грантом 11.G34.31.0026 Правительства РФ (лаборатория имени П. Л. Чебышева при СПбГУ). Работа второго автора частично поддержана грантом НШ4210.2010.1.

Список литературы

[1] Затицкий П. Б., Назаров А. И., Столяров Д. М., *По следам В.А. Садовничего*, Препринт СПбМО N 2010-04. 5с.

[2] Alexander I. Nazarov, Dmitriy M. Stolyarov, Pavel B. Zatitskiy, *On the formula of regularized traces*. arXiv:1103.5775v1.

Задача о разрешимости математической модели стационарного движения водных растворов

Звягин А. В.
Воронежский государственный университет (Россия)

В докладе рассматривается разрешимость в слабом смысле краевой задачи для системы уравнений, описывающей стационарное движение слабых водных растворов полимеров в ограниченной области с локально - липшицевой границей, а также рассматривается обобщение этой задачи для произвольной области (возможно неограниченной).

Вибрационные эффекты в задачах конвекции

Зеньковская С. М.
Южный Федеральный Университет (Ростов-на-Дону, Россия)

Рассматривается задача о конвекции в высокочастотном вибрационном поле. Предполагается, что частота вибрации велика, амплитуда мала, а скорость конечна. В качестве математической модели берутся классические уравнения Обербека-Буссинеска(ОБ), если область имеет твердую границу, либо обобщенные уравнения ОБ(переменная плотность учитывается и в инерционных членах), когда граница свободная, деформируемая. Применяется метод осреднения Крылова-Боголюбова в форме, развитой в работах Симоненко-Зеньковской. В результате возможны три типа осредненных уравнений, связанных с поведением границы:1) граница недеформируема в целом; 2)граница недеформируема в среднем; 3)граница деформируема в целом. В результате осреднения в уравнениях появляется виброгенная сила, а в динамическом краевом условии -виброгенные напряжения. Эти две вибрационные составляющие и приводят к вибрационным эффектам. На примере горизонтального слоя со свободной границей или с твердыми стенками показаны эффекты высокочастотной вибрации, которые зависят от направления и скорости вибрации.

Проекции точки на полиэдр

Зоркальцев В. И.

Институт Систем Энергетики им. Мелентьева СО РАН (Иркутск, Россия)

Рассматриваются свойства и взаимосвязи решений проблемы поиска наименее удалённых от начала координат точек полиэдра. К этой геометрической проблеме сводятся многие прикладные задачи - оценка параметров уравнений линейной регрессии, поиск псевдорешений несовместных систем линейных уравнений и неравенств, поиск допустимых по ограничениям модели решений, максимально приближенных к заданному недопустимому, и др. В качестве конкретизации указанной проблемы рассматриваются результаты минимизации на полиэдре широкого класса штрафных функций, в том числе евклидовых (метод наименьших квадратов), гельдеровских, чебышевских, ортоэдрических (метод минимизации суммы модулей) норм при варьировании в них весовых коэффициентов, а также парето - минимизации абсолютных значений компонент вектора и др. В частности доказано, что любое решение из приведённых выше конкретизаций проблемы может быть получено с любой требуемой точностью методом наименьших квадратов за счёт выбора весов при квадратах отклонений. Даётся краткое описание истории проблемы и её приложений. Излагаемые в докладе результаты являются развитием ранее выполненных исследований для более частного случая (когда вместо полиэдра рассматривается линейное многообразие), обобщённых в монографии: Зоркальцев В.И. “Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения.“ Новосибирск. Наука, 2005 г.

Симметричная двойственность в оптимизации и модели потокораспределения. Проблема согласования интересов в газотранспортной системе СНГ

Зоркальцев В. И., Илькевич Н. И., Медвежонков Д. С.

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН (Иркутск, Россия)

Симметричной двойственностью в оптимизации названа ситуация, когда двойственная к двойственной задаче оптимизации совпадает с исходной задачей. Формируемая теория симметричной двойственности базируется на обобщении преобразований Лежандра и Фенхеля, на теоремах об альтернативных системах линейных неравенств. На основе фактов симметричной двойственности исследуются модели потокораспределения, примерами которых служат электрические цепи, гидравлические цепи (модели систем водо-, тепло-, нефте-, газоснабжения), а также нелинейные транспортные задачи.

Обсуждается проблема тарифообразования с согласованием интересов в нелинейных транспортных моделях на примерах газотранспортной системы СНГ. Сопоставляется тарифообразование по предельным и средним издержкам, на основе минимизации суммарных платежей клиентов, на основе максимизации прибыли монополистов и олигополистов, а также механизмы регулирования деятельности монополистов в транспортных системах. Приводятся взаимно двойственные задачи квадратичного программирования для определения равновесия НЭША на базе линеаризации. Обсуждается роль фактической и потенциальной конкуренции, угроз и контругроз в формировании рационального поведения, а также "ловушек возникающих из-за неправильных оценок одними агентами стратегий поведения других (типа неравновесия Штакельберга).

Спектральная и приближенная управляемость диссипативных систем с распределенными параметрами

Зуев А. Л.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины (Донецк, Украина)

Рассмотрен класс линейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве с конечномерным управляющим воздействием. С целью исследования вопроса о спектральной управляемости таких систем поставлена вспомогательная задача оптимального управления. Для найденного семейства оптимальных управлений построена оценка энергии подсистем с модальными координатами. В результате получены достаточные условия разрешимости задачи приближенной управляемости в классе гладких функций управления, а также предложено описание множества достижимости для диссипативных систем.

С помощью предложенного подхода исследованы задачи управляемости и планирования движения для механических систем с упругими тросами, балками и оболочками. Обсуждается связь полученных решений с проблемами адаптивной оптики и алгоритмами гашения колебаний в робототехнических системах.

Работа поддержана грантом Президента Украины для молодых ученых (GP/F32/141).

Алгоритм минимизации групповой информационной энтропии на кофигурациях разбиения множества случайных точек.

Иванов Р. А., Фирстов В. Е.

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (Россия)

Процесс обучения рассматривается как целенаправленное распознавание образов передаваемого учебного контента, причем, как правило, процедура идентификации происходит по неполной информации о данном объекте. Предлагается управление учебным процессом реализовывать по стохастической мере в виде информационной энтропии по Шеннону. При этом оптимизация управления происходит по критерию минимума информационной энтропии. Показывается, что внедрение в учебный процесс технологии группового сотрудничества повышает его эффективность и теоретически этот факт проявляется в снижении информационной энтропии рассматриваемого учебного процесса. Предложенная информационная модель подтверждена экспериментально.

О солитонных решениях некоторых краевых задач для уравнений иерархии КдФ

Игнатьев М. Ю.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (Россия)

Доклад посвящен исследованию краевых задач для общего уравнения КдФ с краевыми условиями специального вида. Предложена конструктивная процедура построения частных решений изучаемых задач, основанная на идеях метода обратной спектральной задачи. Наиболее подробно рассматривается построение солитонных решений.

Сравнительная статика дискретной демографической модели, учитывающей миграцию

Ильин Е. М., Косолапенко Н. Г.

Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН (Россия)

В рамках дискретной демографической модели, обобщающей классическую модель Лесли за счет учета миграции (см. [1]), изучается влияние изменений возрастных коэффициентов рождаемости, смертности и миграции на возрастную структуру стабильного населения. В случае неотрицательных сальдо миграции модель обладает свойством эргодичности, т.е. при больших временах динамика стабилизируется и население приобретает постоянную возрастную структуру и постоянный темп роста численности. Для отрицательных сальдо будем предполагать свойство эргодичности выполненным, поскольку численные эксперименты показали, что реальные миграционные потоки не меняют характер спектра матрицы модели. Возрастная структура стабильного населения не зависит от начального населения и полностью определяется режимами воспроизводства и миграции. В результате анализ стабильного населения позволяет судить о том, насколько благоприятны (или негативны) тенденции развития реальных населений при различных типах режимов воспроизводства и миграции. Аналитической основой анализа служат явные выражения для характеристического полинома матрицы модели и компонент вектора, задающего стабильной население. Установлены формулы, связывающие изменения темпа роста стабильного населения с изменениями коэффициентов дожития (вероятностей дожития до начального возраста следующей возрастной группы), рождаемости и миграции. С их помощью получены выражения, описывающие изменения возрастной структуры стабильного населения, а также его среднего возраста, различных вариантов показателей демографической нагрузки и старения. Рассмотрен вопрос о влиянии вариации коэффициентов рождаемости и вероятностей дожития на величину поступлений в пенсионный фонд (ПФ) и на объем его расходов. Показано, что при распределительной пенсионной системе, когда размер ПФ незначителен, любые изменения коэффициентов рождаемости (при постоянстве остальных демографических параметров), ведущие к увеличению темпа роста стабильного населения, приводят к росту объема ПФ в расчете на одного пенсионера. Получены формулы, описывающие величину изменений объема ПФ и размер средней пенсии как функции приращений коэффициентов дожития возрастных групп. В последнее время для большинства европейских стран, включая Россию, характерен процесс старения материнства, т.е. сдвиг рождения детей к старшим возрастам репродуктивного периода (см., [2]). При помощи модели рассмотрен вопрос о влиянии возраста матери при рождении детей на возрастную структуру стабильного населения. Показано, что при прочих равных условиях и неизменной величине суммарного коэффициента рождаемости смещение максимумов возрастных коэффициентов в старшие возраста приводит в случае суженного воспроизводства к росту доли детей и снижению среднего возраста, т.е. к омоложению возрастной структуры стабильного населения. Полученные результаты, помимо уточнения свойств стабильного населения, могут найти применение и в прогнозировании, в частности, при разработке прогнозных сценариев.

Список литературы

[1] Ильин Е.М., Косолапенко Н.Г., Сафарова Г.Л. Оценка замещающей миграции. Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. IV. С.-Петербург: Наука, 2005, часть 1, с. 186-200.

[2] Население России 2007. Пятнадцатый ежегодный демографический доклад / Отв. ред. А.Г. Вишневский. - М.: Издательский дом ГУ ВШЭ, 2009.

Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми

Ишмеев М. Р.

Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия)

Для определённого класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с большим параметром построена и обоснована полная асимптотика условно периодического решения. Исследованы вопросы устойчивости и неустойчивости его по Ляпунову. Рассмотрены возможности повышения первого перестроечного показателя.

Теорема Бёрлинга и стабилизация решения уравнения теплопроводности

Калужина Н. С.

Воронежский государственный университет (Россия)

Вводится понятие медленно меняющейся на бесконечности функции и рассматриваются свойства таких функций. Для параболического уравнения с начальной функцией из однородного пространства доказано, что слабое решение как функция первого аргумента является медленно меняющейся на бесконечности функцией.

Модельный пример теоремы Габриэля

Кандагура А. Н., Карпенко И. И.

Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского (Симферополь, Украина)

Пусть (Γ, Λ) — ориентированный граф, Γ_0 — множество его вершин, Γ_1 — рёбер, и Λ — некоторая ориентация.

Рассматривается категория $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$, объектами которой являются наборы (V, f) линейных пространств V_i $(i \in \Gamma_0)$ и отображений f_l $(l \in \Gamma_1)$. Морфизмами категории $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ являются наборы линейных отображений $\varphi_i : V_i \to W_i$ $(i \in \Gamma_0)$ таких, что для любого ребра $l = \{j, k\} \in \Gamma_1$ $\varphi_k f_l = g_l \varphi_j$, где $g_l : W_j \to W_k$.

Классическая теорема Габриэля утверждает, что в категории $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ существует конечное число неизоморфных неразложимых объектов тогда и только тогда, когда граф Γ — граф Дынкина ($\mathrm{A_n}$, $\mathrm{D_n}$, $\mathrm{E_6}$, $\mathrm{E_7}$, $\mathrm{E_8}$).

В данной работе построен модельный пример, иллюстрирующий теорему Габриэля, рассмотрен граф $\mathrm{D_4}$, для которого с помощью пакета Maple найдены положительные корни. Показано, что для данного графа в категории $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ существуют 12 неизоморфных неразложимых объектов.

Многогранник Ньютона, асимптотики объёмов и асимптотики экспоненциальных интегралов

Кароль А. И.

Санкт-Петербургский государственный университет (Россия)

0

The smooth function $p(x) \geq 0, \ x \in R^d \ p(0) = 0$ is considered. If p is nondegenerate with respect to its Newton's polyhedron, the asymptotics of the distribution function is derived: $meas\{x \in R^d | \ p(x) < t\} \sim at^{1/s} \ln^k t, \ t \to 0$, s is the coordinate of the intersection point of the diagonal of the positive orthant in R^d with Newton's polyhedron, k is the number of degrees of freedom for the support hyperplane at this point. The corollary of this result is the asymptotics of the Laplace integrals.

Спектральный анализ дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами; оценки лакун спектра

Карпикова А. В.

Воронежский государственный университет (Россия)

Для дифференциального оператора $L(\theta)$ с областью определения $y \in D(L(\theta)) = \left\{y \in W_2^2[0,2\pi] : y(2\pi) = e^{i\theta}y(0), y'(2\pi) = e^{i\theta}y'(0), \theta \in [0,2\pi]\right\}$ получены асимптотика собственных значений и оценки лакун спектра.

О некоторых оценках минимального собственного значения одной задачи Штурма — Лиувилля с интегральным условием на потенциал и симметричными краевыми условиями

Карулина Е. С.

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (Россия)

Рассматривается задача Штурма-Лиувилля:

$$y''(x) - q(x)y(x) + \lambda y(x) = 0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} y'(0) - k^2 y(0) = 0, \\ y'(1) + k^2 y(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где функция $q(x) \geq 0$, суммируемая и ограниченная на $[0,1]$ и удовлетворяет условию: $\int_0^1 q^\gamma(x)dx = 1$, $\gamma \neq 0$. Множество таких функций $q(x)$ обозначим A_γ.

Оценивается минимальное собственное значение λ_1 этой задачи при различных значениях γ и k.

Пусть

$$M_\gamma = \sup_{q \in A_\gamma} \lambda_1(q) \text{ и } m_\gamma = \inf_{q \in A_\gamma} \lambda_1(q).$$

Теорема 1.
1) Если $\gamma \in (-\infty, 0) \cup (0,1)$, то $M_\gamma = +\infty$.
2) Если $\gamma \geq 1$ и $k = 0$, то $M_\gamma = 1$.
3) Если $\gamma = 1$ и $k \neq 0$, то $M_1 = \xi_*$, где ξ_* — решение уравнения $\operatorname{arctg} \frac{k^2}{\sqrt{\xi}} = \frac{\xi - 1}{2\sqrt{\xi}}$.
4) Пусть $\gamma > 1$. Тогда при $k = 0$ имеем $m_\gamma = 0$; при $k \neq 0$ имеем $m_\gamma = \lambda_1^0$, где λ_1^0 — наименьшее положительное решение уравнения

[0]работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 10-01-00154а и ведущей научной школы НШ - 4210.2010.1

$(k^4-\lambda)\sin\sqrt{\lambda}+2k^2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0$.

5) Если $\gamma > 0$, *то* $m_\gamma \leq \pi^2$ *и* $m_\gamma \to \pi^2$ *при* $k \to \infty$.

Подобная задача для уравнения $y''+\lambda q(x)y=0$ при условиях $y(0)=y(1)=0$, $q(x)\in A_\gamma$ рассматривалась в работе [1].

Работа выполнена при частичной поддержке грантом РФФИ N 11-01-00989.

Литература

1. *Egorov Yu.V., Kondratiev V.A.* On Spectral theory of elliptic operators // in Operator theory: Advances and Applications. Birkhäuser, 1996, v.89.

Один новый подход к исследованию операторов Шредингера с PT-симметричным потенциалом

Киселев А. В.

Санкт-Петербургский государственный университет (Россия)

Рассматриваются несамосопряженные, недиссипативные операторы Шредингера с PT-симметричными потенциалами на вещественной оси. Предложен новый подход к их спектральному анализу, основанный на применении методов функциональной модели диссипативного оператора. В частности, данный подход может быть использован при анализе известного явления стабильности вещественного спектра операторов указанного класса при достаточно малых константах связи.

Также обсуждаемый подход позволяет получить явное спектральное представление для операторов Шредингера с PT-симметричными потенциалами.

Оптимизация винтовых пар в винтовых насосах

Ковалева М. И.

Военный авиационный инженерный университет (Воронеж, Россия)

Тема доклада связана с задачей оптимизации шестеренчатого зацепления пары винтовых поверхностей. Эта задача является составной частью общей проблемы проектирования и оптимизации многофазных винтовых насосов (ВН). Изучение ВН можно осуществлять исходя из того, что кинематические характеристики ВН определяются геометрическими свойствами и особенностями поперечных сечений винтов, которые задаются в виде замкнутых контуров (гладких или кусочно гладких) посредством профильных функций. Их удобно представлять как функции скалярного аргумента со значениями в поле комплексных чисел. Таким образом, кинематические свойства ВН можно исследовать, опираясь на анализ однопараметрических периодических семейств гладких плоских контуров и, следовательно, на теорию гладких отображений двумерных торов в координатную плоскость. Такой подход позволяет не только изучать геометрические свойства пар винтовых поверхностей, но и создавать алгоритмы их оптимизации.

Международные образовательные программы: особенности участия, реализации и внедрения результатов

Козлакова Г. А.

Институт высшего образования Национальной Академии педагогических наук Украины (Киев, Украина)

Сингулярные задачи для интегродифференциальных уравнений второго порядка в динамических моделях страхования

Белкина Т.А., Конюхова Н.Б.,** Курочкин С.В.***

*Центральный экономико–математический институт РАН,
**Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН (Москва, Россия)

Основная рассматриваемая задача имеет вид:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u)+(au+c)\varphi'(u)-\lambda\varphi(u)+\frac{\lambda}{m}\int_0^u \varphi(u-x)\exp(-x/m)dx=0, \quad u\in\mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$|\lim_{u\to+0}\varphi(u)|<\infty, \quad |\lim_{u\to+0}\varphi'(u)|<\infty, \quad \lim_{u\to+0}[c\,\varphi'(u)-\lambda\,\varphi(u)]=0, \tag{2}$$

$$\lim_{u\to\infty}\varphi(u)=1, \qquad \lim_{u\to\infty}\varphi'(u)=0. \tag{3}$$

Здесь все параметры a, b^2, c, λ, m – действительные положительные числа.

Задача возникает для вероятности неразорения $\varphi(u)$ страховой компании за бесконечное время (как функции ее первоначального капитала u) в динамической модели страхования Крамéра–Лундберга с экспоненциальным распределением размера требований (исков) и при определенной стратегии поведения компании на финансовом рынке – вложении постоянной доли капитала в рисковый актив (акции) и оставшейся доли – в безрисковый актив (банковский счет) [1].

Теорема. *Пусть в* (1) *все параметры* a, b^2, c, λ, m *– фиксированные положительные числа, и пусть выполняется условие "надежности портфеля активов":* $2a/b^2 > 1$. *Тогда существует, и притом единственное, решение* $\varphi(u)$ *сингулярной линейной задачи* (1)–(3)*, оно является гладкой монотонной неубывающей на* $\mathbb{R}_+$ *функцией и удовлетворяет ограничениям* $0 < \varphi(u) < 1$ *для любого конечного* $u \in \mathbb{R}_+$.

Постановка задачи (1)–(3) дана в [1]; её предварительный анализ осуществлен в [1], ч.II, а более полный и строгий – в [2].

В данной работе дается сводка результатов [1], [2] по данной задаче и дополнительно изучаются "вырожденные" случаи, когда один или несколько параметров в (1) принимают нулевые значения. Соответствующие "вырожденные" задачи, некоторые из которых имеют явные решения, представляют как самостоятельный математический интерес, так и интерес для моделей теории риска.

Работа поддержана РФФИ, коды проектов 10–01–00767 и 11–01–00219.

Список литературы

[1] Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Куркина А. О. *Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования:*
I. Инвестиционные стратегии и вероятность разорения// Обозрение прикладной и промышленной математики (ОППМ), 16 (2009), 961–981;
II. Модель Крамера–Лундберга при экспоненциальном распределении размера требований// ОППМ, 17 (2010), 3–24.

[2] Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Курочкин С. В. *Сингулярная начальная задача для линейного интегродифференциального уравнения, возникающего в моделях страховой математики*// Intern. Scientific Journal Spectral and Evolution Problems, 21 (2011) (в печати).

Об абстрактной формуле Грина для полуторалинейных форм

Копачевский Н. Д.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Для ограниченных равномерно аккретивных форм при определенных условиях доказывается существование абстрактной формулы Грина, частным случаем которой является обобщенная формула Грина для оператора Лапласа, рассматриваемого в области с липшицевой границей.

Устанавливаются условия, обеспечивающие наличие абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач. Приводятся примеры обобщенных формул Грина, в частности, теории упругости, гидродинамики и др.

Применение функции состояния в задаче о малых колебаниях вращающейся гидросистемы “жидкость-газ”

Копачевский Н. Д., Ситшаева З. З.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Крымский инженерно-педагогический университет (Симферополь, Украина)

В работе рассматривается применение подхода С.Л. Соболева [1], впоследствии использованного для исследования гидродинамических задач: Р.В. Рваловым и М.П. Дяченко – для тяжелой вращающейся жидкости и Н.Д. Копачевским – для идеальной вращающейся жидкости [2], к проблемам малых колебаний вращающихся гидросистем.

Малые движения идеальной капиллярной жидкости плотности $\rho_0 = \mathrm{const} > 0$, в невозмущенном состоянии занимающей осесимметричную область Ω, равномерно вращающейся с сосудом с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_3$, $\vec{\omega}_0 > 0$ в однородном гравитационном поле интенсивности $-\vec{g} = g\vec{e}_3$, будем рассматривать в системе координат (x_1, x_2, x_3), неподвижно связанной с сосудом. В состоянии относительного равновесия давление $p_0(x)$ и поле скоростей жидкости $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$ определяются соотношениями

$$p_0(x) = \rho_0[-gx_3 + \frac{1}{2}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2)], \quad \omega_0 \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 2\omega_0 \vec{u} \times \vec{e}_3 - \nabla p, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \tag{1}$$

где $p = p(t, x)$ – динамическое поле давлений. Решение уравнения (1) записывается в виде

$$\vec{u} = \nabla \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\omega_0 \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \times \vec{e}_3 + 4\omega_0^2 (\nabla \Phi \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3, \quad p = -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} - 4\omega_0^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \ \ (\text{в } \Omega) \tag{2}$$

причем функцию состояния $\Phi = \Phi(t, x)$ определяют из уравнения $\Delta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 4\omega_0^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0$. Отсюда следует, что можно рассматривать начально-краевые задачи для вращающейся идеальной однородной жидкости, используя лишь одну скалярную функцию Φ.

Цель данной работы – получить аналогичное уравнение для функции состояния поля смещений вращающегося баротропного газа и обобщить его на случай вращающейся системы "жидкость-газ".

Используя зависимость равновесной плотности от давления баротропного газа, имеем

$$\rho_0(x) = \rho_0(0)\exp(-a^{-2}\Pi_0(x)),\ \Pi_0(x) = gx_3 - \frac{1}{2}\omega_0^2(x_1^2+x_2^2),\ a>0 - \text{скорость звука}, \tag{3}$$

из линеаризованных уравнений движения вращающегося баротропного газа следует

$$\rho_0(x)\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \rho_0(x)[2\omega_0\vec{u}\times\vec{e}_3] + \rho_0(x)\vec{f} - \rho(x)\nabla\Pi_0,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0(x)\vec{u}) = 0,\ \nabla p = a^2\nabla\rho \quad (\text{в } \Omega), \tag{4}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = 2\omega_0\vec{u}\times\vec{e}_3 - a^2\nabla\Big(\frac{\rho}{\rho_0}\Big) + \vec{f}. \tag{5}$$

Сравнивая уравнения (5) и (1) и учитывая (2), получаем искомые представление для поля смещений $\vec{w} = \vec{w}(t,x)$ и уравнение для функции состояния $\Psi = \Psi(t,x)$:

$$\vec{w} = \nabla\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + 2\omega_0\nabla\frac{\partial\Psi}{\partial t}\times\vec{e}_3 + 4\omega_0^2(\nabla\Psi\cdot\vec{e}_3)\vec{e}_3,$$

$$a^2\frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{\partial^4\Psi}{\partial t^4} - 4\omega_0^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2},\ \Delta_0\varphi := \frac{\operatorname{div}(\rho_0\nabla\varphi)}{\rho_0}, \tag{6}$$

$$\Delta_0\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + 2\omega_0\frac{\nabla\rho_0}{\rho_0}\cdot\Big(\nabla\frac{\partial\Psi}{\partial t}\times\vec{e}_3\Big) +$$

$$+ 4\omega_0^2\Big(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_3^2} + \rho_0^{-1}\frac{\partial\rho_0}{\partial x_3}\frac{\partial\Psi}{\partial x_3}\Big) - a^{-2}\Big(\frac{\partial^4\Psi}{\partial t^4} + 4\omega_0^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\Big) = 0. \tag{7}$$

Замечание. *При предельном переходе в* (7) $a^{-2}\to 0$ *(т.е. к несжимаемой жидкости) в силу* (3) *получаем* $\rho_0(x)\equiv\rho_0>0$ *и уравнение* ($\Delta_0\to\Delta$) *для функции состояния вращающейся жидкости с заменой* Ψ *на* Φ.

Аналогичным образом в работе получены представление решения задачи о малых колебаниях равномерно вращающейся системы "жидкость-газ" через функцию состояния для поля смещений и уравнение для ее определения.

Список литературы

[1] Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Известия АН СССР. Матем. – 1954. – 18, № 1. – с. 3 – 50.

[2] Копачевский Н.Д. Применение метода С.Л. Соболева в задаче о колебаниях идеальной капиллярной вращающейся жидкости // ЖВМиМФ. – 1976. – 16, № 2. – с. 426–439.

Тематическое планирование и конспекты занятий по математическому анализу для студентов 1 курса специальности “математика”

Коренева Л. В., Кушнерева Г. И.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
(Симферополь, Украина)

Пособие содержит подробную разбивку материала по часам. Рекомендуемые задачи взяты как из известных сборников, так и составлены новые. Каждая тема раскрывается от простейших примеров к более сложным и охватывает различные варианты решений.

Методика, предложенная в пособии апробирована в ТНУ в течение многих лет. Можно считать этот материал кратким содержанием более подробного пособия, в котором содержится как теоретическая часть занятия, так и подробное решение задач и примеров. Также подобраны домашние задания из задачника Демидовича Б.П.

К асимптотическому интегрированию нормальных систем дифференциальных уравнений с большим параметром

Крутенко Е. В.

Ростовский-на-дону автодорожный колледж (Россия)

В работе построено полное асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений нормальной однородной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром ω. Коэффициенты уравнений пропорциональны определённым положительным степеням ω, причём часть из них осциллирует с частотой ω. Старший матричный коэффициент системы имеет один элементарный делитель произвольной кратности.

Условия ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера-Зигмунда

Кряквин В. Д., Омарова Г. П.

Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия)

В сообщении для псевдодифференциальных операторов

$$(T_a f)(x) = (2\pi)^{-n} \iint a(x,\xi) e^{i(x-y)\xi} f(y)\, dyd\xi$$

с символами, удовлетворяющими оценкам

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \leq c_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

для любых $x,\ \xi \in \mathbb{R}^n$, любых мультииндексов α, β и $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \delta \leq 1$, обсуждаются вышеуказанные условия. Утверждается, что T_a ограничен из пространства Гельдера-Зигмунда Λ_s в $\Lambda_{s-m-(1-\rho)(n+\varepsilon)}$ для любого s и $\varepsilon > 0$ и с известной оценкой нормы оператора.

Равносходимость интегральных операторов с дробно-линейной инволюцией

Кувардина Л. П.

Саратовский государственный университет (Россия)

σ-симметрические дилатации операторного узла неограниченного оператора

Кудряшов Ю. Л.

Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского (Симферополь, Украина)

Вводится понятие операторного узла для неограниченного оператора с непустым множеством регулярных точек. С помощью этого понятия производится новое построение σ-симметрической дилатации узла неограниченного оператора.

Численное преодоление предельных состояний упругопластических тел

Кузнецов Е. Б.

Московский авиационный институт (государственный технический университет) МАИ (Москва, Россия)

Рассматривается задача квазистатического деформирования тел из упругопластического материала. После дискретизации уравнений методом конечных элементов по пространственной переменной задача определения равновесных конфигураций сводится к интегрированию системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В предельном состоянии тела из идеального упругопластического материала задача становится сингулярной. В качестве регуляризации применяется метод продолжения решения по наилучшему параметру, что позволяет находить решение задачи в предельных состояниях тел.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-08-00013) и целевой программы Министерства образования и науки РФ 2.1.1/11375.

Условия компактной непрерывности, K-дифференцируемости и повторной K-дифференцируемости вариационных функционалов в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$ функций многих переменных.

Кузьменко Е. М.

Таврический национальный университет им. Вернадского (Симферополь,Украина)

Для интегрантов $f(x, y, z)$ вариационных функционалов $\int_D f(x, y, y')dx$, действующих в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \geq 1$, над компактной областью $D \subset \mathbb{R}^n$, вводятся классы Вейерштрасса $WK_p(z)$, $W^1K_p(z)$ и $W^2K_p(z)$, изучавшиеся ранее в случае пространства Соболева $W^{1,2}$ над отрезком.
Показано, что попадание интегранта в подходящий класс Вейерштрасса гарантирует компактную непрерывность и компактную дифференцирумость соответствующего порядка для вариационного функционала.

Математические проблемы управления ресурсами распределенных вычислительных систем

Кузюрин Н. Н.

ИСП РАН (Москва, Россия)

Развитие новых технологий, использующих возможности телекоммуникационных сетей для распределенных вычислений (Грид, облачные вычисления), стимулировало потребности в новых моделях, описывающих проблемы управления ресурсами подобных распределенных вычислительных систем.

В докладе предполагается описать несколько новых моделей, привести полученные результаты и сопоставить их с результатами для классических моделей теории расписаний. Отдельное внимание будет уделено проблеме повышения энерго-эффективности распределенных вычислительных систем алгоритмическими средствами.

Исследование регулярных и релаксационных колебаний осцилляторов Релея и Ван дер Поля

Кумакшев С. А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия)

Построены и исследованы периодические движения существенно нелинейных автоколебательных систем, описываемых уравнениями Релея и Ван дер Поля. На основе метода Ляпунова-Пуанкаре с помощью разработанного алгоритма ускоренной сходимости и процедуры продолжения по параметру вычислены период и начальная величина скорости системы, определяющие автоколебания осцилляторов для малых и умеренно больших значений коэффициентов обратной связи. С гарантированной относительной и абсолютной погрешностью также построены траектории и предельные циклы. Установлены качественные особенности автоколебаний, вызванные увеличением коэффициентов самовозбуждения; дано сопоставление осцилляторов. Приведено сравнение результатов численного исследования периодических решений уравнения Релея с известными решениями для квазилинейной постановки.

О силе тензорного произведения двух обыкновенных дифференциальных операторов в пространстве $C(\mathbb{R}^2)$

Лиманский Д. В.

Донецкий национальный университет (Украина)

Дано описание линейного пространства $L(P)$ минимальных дифференциальных полиномов $Q(D_1, D_2)$, подчиненных произведению $P(D_1, D_2) = p_1(D_1)p_2(D_2)$ двух обыкновенных дифференциальных операторов в $C(\mathbb{R}^2)$-норме. Показано, что если все нули символа $p_1(\xi_1)$ вещественные и простые, то размерность пространства $L(P)$ зависит от числа вещественных нулей символа $p_2(\xi_2)$.

К вопросу о полной наблюдаемости гибридных дифференциально-разностных систем

Марченко В. М.

Белорусский государственный технологический университет (Минск, Беларусь)

Исследуются постановки и вопросы разрешимости задач полной наблюдаемости в линейных стационарных гибридных дифференциально-разностных (ГДР) динамических системах. В связи с тем, что в общем случае пространство состояний таких систем является бесконечномерным и не обязательно “минимальным”, рассматриваются различные постановки задач в зависимости от того, какие состояния наблюдаются. Основное внимание концентрируется на простейшей ГДР системе в симметрической форме. Получены эффективные параметрические критерии, а также проанализированы связи между различными понятиями полной наблюдаемости в ГДР системах. В случае ГДР систем со скалярными коэффициентами получена полная классификация понятий полной наблюдаемости в классе непрерывных начальных функций с условием непрерывной стыковки. Исследована задача вычисления минимального числа выходов спектрально наблюдаемой ГДР системы.

Основной результат: система

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t), \tag{1}$$

$$x_2(t+h) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t),\ t \geq 0; \tag{2}$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_1(+0) = x_{10},\ \ x_2(\tau) = \psi(\tau),\ \tau \in [0, h); \tag{3}$$

и выходом

$$y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t),\ t \geq 0, \tag{4}$$

спектрально наблюдаема тогда и только тогда, когда

$$rank \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ pI_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & e^{ph} I_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix} = n_1 + n_2,\ \ p \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

Символ I_r означает единичную $(r \times r)$-матрицу, $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел.

Оценка нормы оператора, обратного к дифференциальному

Марюшенков С. В.

Воронежский государственный университет (Россия)

В данном сообщении будет изложена оценка нормы оператора, обратного к дифференциальному оператору, действующему в лебеговых пространствах функций, определённых на положительной полуоси.

Системная инженерия проектов информатизации организационных систем

Маслянко П. П.

Национальный технический университет Украины “КПИ” (Киев, Украина)

Системная инженерия проектов информатизации организационных систем (Орг.С) охватывает все этапы жизненного цикла информационно-коммуникационных систем. Итеративно-инкрементный процесс разработки обеспечивает выделение множества сущностей реализации проекта информатизации Орг.С, разработку бизнес-модели. Процесс бизнес-моделирования реализуется с помощью бизнес-профиля.

Двучленные дифференциальные операторы с сингулярным коэффициентом

Мирзоев К. А.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова (Россия)

Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи

Михайлец В. А., Мурач А. А.

Институт математики НАН Украины (Киев, Украина)

В докладе дается обзор результатов авторов, посвященных пространствам Хермандера и их различным приложениям. Вводятся и исследуются пространства Хермандера на гладких замкнутых многообразиях для широкого класса радиальных функциональных параметров, которые являются правильно меняющимися на $+\infty$ (по Карамата) функциями аргумента $|\xi|$. Даны различные эквивалентные определения этих пространств, подобные используемым для пространств Соболева. Указаны приложения пространств Хермандера к эллиптическим операторам на многообразиях и эллиптическим краевым задачам в евклидовых областях, к спектральным задачам. Развернутое изложение этих результатов содержится в монографии: В. А. Михайлец, А. А. Мурач, Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи, К.: Ин-т математики, 2010 (доступно в arXiv:1106.3214).

Несимметричные приближения несимметричных классов функций

Моторный В. П.

Днепропетровский национальный университет (Украина)

Получены асимптотически точные оценки наилучших несимметричных приближений алгебраическими многочленами несимметричных классов функций.

Матричная коррекция данных в задачах принятия решений в условиях неопределенности

Муравьева О. В.

Московский педагогический государственный университет (Москва, Россия)

Методы оптимальной коррекции матрицы коэффициентов несовместной системы линейных уравнений, в частности обобщенный метод наименьших квадратов (total least squares), применяются к задачам регрессии и классификации с неопределенными данными. В качестве принципов оптимальности используется принцип наилучшего гарантированного результата, максимизации правдоподобия и сильное решение интервальной системы линейных неравенств.

Рассматривается задача построения линейного решающего правила по прецедентам, значения признаков которых известны неточно. Предложены методы построения гиперплоскости (или полосы заданной ширины), которая является разделяющей для обучающей выборки, ближайшей к заданной (минимальная коррекция) , и гиперплоскости, разделяющей для всех прецедентов из заданных интервалов (сильное решение).

Некоторые свойства потоков в несепарабельных симметричных пространствах

Векслер А. С., Муратов М. А., Рубштейн Б. А.

СП "ALSIB"(Ташкент, Узбекистан),
Таврический национальный университет (Симферополь, Украина),
Университет Бен Гуриона (Беер-Шева, Израиль)

Пусть $(\mathbf{S},\mu)$ — пространства Лебега с конечной непрерывной мерой. Под автоморфизмом $(\mathbf{S},\mu)$ понимается любое сохраняющее меру μ обратимое преобразование на $\mathbf{S}$.

Однопараметрическая группа автоморфизмов $\{T^\tau\}_{\tau\in\mathbf{R}}$ пространства $(\mathbf{S},\mu)$ называется потоком, если функция $f(T^\tau x)$ измерима на $\mathbf{S}\times\mathbf{R}$ для любой измеримой функции $f(x)$ на $\mathbf{S}$.

Пусть $\mathbf{E}$ — симметричное пространство измеримых функций на $(\mathbf{S},\mu)$ и $\{U_T^\tau\}_{\tau\in\mathbf{R}}$ — сопряженная к $\{T^\tau\}_{\tau\in\mathbf{R}}$ группа операторов в $\mathbf{E}$, где $U_T^\tau f(x)=f(T^\tau x)$, $\quad f\in\mathbf{E}$.

Положим

$$R_t f(x)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t f(T^\tau x)d\tau,\ t>0.$$

Теорема 1. (i). *Если симметричное пространство* $\mathbf{E}$ *сепарабельно, то группа* $\{U_T^\tau\}_{\tau\in\mathbf{R}}$ *сильно непрерывна в* $\mathbf{E}$.

(ii). *Если симметричное пространство* $\mathbf{E}$ *несепарабельно, то для каждого нетривиального потока* $\{T^\tau\}_{\tau\in\mathbf{R}}$ *группа* $\{U_T^\tau\}_{\tau\in\mathbf{R}}$ *не является сильно непрерывной в* $\mathbf{E}$.

Теорема 2. *(Статистическая эргодическая теорема для потоков). Если* $\mathbf{E}$ — *сепарабельное симметричное пространство, то средние* $\{R_t\}_{t>0}$ *сходятся в* $\mathbf{E}$ *в сильной операторной топологии при* $t\to+\infty$.

Легко видеть, что если симметричное пространство $\mathbf{E}$ интерполяционно между $\mathbf{L}_1(\mathbf{S},\mu)$ и $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{S},\mu)$, то средние $\{R_t\}_{t>0}$ действуют в $\mathbf{E}$. Имеет место обратное утверждение.

Теорема 3. *Если симметричное пространство* $\mathbf{E}$ *не интерполяционно между* $\mathbf{L}_1(\mathbf{S},\mu)$ *и* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{S},\mu)$, *то для любого нетривиального потока* $\{T^\tau\}_{\tau\in\mathbf{R}}$ *без периодических точек и каждого* $t_0>0$ *существует такая функция* $\widehat{f}\in\mathbf{E}$, *что* $R_{t_0}\widehat{f}\notin\mathbf{E}$.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{E}\neq\mathbf{L}_\infty(\mathbf{S},\mu)$ *интерполяционное между* $\mathbf{L}_1(\mathbf{S},\mu)$ *и* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{S},\mu)$ *несепарабельное симметричное пространство. Если поток* $\{T^\tau\}_{\tau\in\mathbf{R}}$ *нигде не транзитивен, то средние* $\{R_t\}_{t>0}$ *сходятся в* $\mathbf{E}$ *в сильной операторной топологии при* $t\to+\infty$ *тогда и только тогда, когда почти все точки* $s\in\mathbf{S}$ *периодические для* $\{T^\tau\}_{\tau\in\mathbf{R}}$ *и их периоды ограничены в совокупности.*

Если же это не так, то для всякой функции $f\in\mathbf{E}\setminus\mathbf{E}_0$ *найдется такая равноизмеримая с ней функция* $\widehat{f}$, *что* $R_t\widehat{f}$ *не сходятся в* $\mathbf{E}$ *при* $t\to+\infty$ *(* $\mathbf{E}_0$ *— замыкание в* $\mathbf{E}$ *множества ограниченных функций).*

Работа выполнена при частичной поддержке гранта ГФФИ, проект
№ 40.1/008.

Динамика линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций

Мусин И. Х.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН (Уфа, Россия)

Будут доложены результаты о гиперцикличности линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций на открытых неограниченных множествах в $\mathbb{R}^n$ при минимальных условиях на весовые функции. При их получении важную роль играют новые результаты по аппроксимации полиномами в этих пространствах (некоторые частные случаи рассматривались в [1]).

Литература

1. Мусин И.Х. О преобразовании Фурье-Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$. Математический сборник. 2004. Т. 195. № 10. С. 83-108.

Асимптотические решения двумерного волнового уравнения с вырождающейся скоростью и локализованными начальными данными

Назайкинский В. Е.

Институт проблем механики РАН (Москва, Россия)

В области с гладкой границей рассматривается задача Коши для волнового уравнения, вырождающегося на границе области, с начальными данными, локализованными в окрестности внутренней точки области. Асимптотические решения строятся с использованием модификации метода канонического оператора Маслова. Основная трудность в вырожденном случае состоит в том, что траектории гамильтонова векторного поля уходят на бесконечность по импульсным переменным за конечное время. При переходе через бесконечно удаленную точку на лагранжевом многообразии возникает фазовый множитель, аналогичный возникающему при переходе через цикл особенностей индексу Маслова. Геометрия лагранжева многообразия и конструкция асимптотических решений будут подробно описаны в докладе.

О точной константе в трехпараметрическом неравенстве Пуанкаре

Герасимов И. В., Назаров А. И.

LG Electronics R&D Labs (Россия),
Санкт-Петербургский госуниверситет (Россия)

Пусть $1 \le p, q, r \le \infty$. Рассмотрим задачу о нахождении точной константы в обобщенном неравенстве Пуанкаре

$$\lambda_{pqr} = \min \frac{\|y'\|_{L_p[-1,1]}}{\|y\|_{L_q[-1,1]}}; \qquad \int\limits_{-1}^{1} |y(t)|^{r-2} y(t)\,dt = 0 \tag{1}$$

(при $r = \infty$ последнее соотношение понимается в предельном смысле).

Задача (1), а также ее частные случаи и некоторые другие задачи, сводящиеся к (1), возникает (в основном при $r = 2$) в различных областях математики, в частности, при исследовании оптимальности некоторых критериев согласия в непараметрической статистике ([2, §6.2]) и при оценке собственных значений в задаче Лагранжа об устойчивости колонны ([3]).

Во многих работах, начиная с [1], изучались бифуркации экстремалей задачи (1). После ряда предварительных результатов было установлено ([4], [5]), что при $r = 2$ минимизирующая функция задачи (1) нечетна, если $q \le 3p$ (в этом случае точная константа в (1) вычисляется явно), и не обладает симметрией, если $q > 3p$. В работе [6] асимметрия экстремали в (1) была доказана при произвольном r и $q > (2r-1)p$.

Мы устанавливаем окончательный результат в этой задаче.

Теорема. *Пусть $q \le (2r-1)p$. Тогда минимайзер задачи (1) нечетен, и минимум равен $\mathfrak{F}(\frac{1}{q}) \cdot \mathfrak{F}(\frac{1}{p'})/\mathfrak{F}(\Theta)$, где $\mathfrak{F}(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s^s}$, $\Theta = \frac{1}{q} + \frac{1}{p'}$.*

Работа второго автора поддержана грантом РФФИ 11-01-00825 и грантом НШ.4210.2010.1.

Список литературы

[1] B. Dacorogna, W. Gangbo, N. Subia, *Sur une generalisation de l'inegalite de Wirtinger* // Ann. Inst. H. Poincaré. Analyse Non Linéaire. **9** (1992), 29-50.

[2] Я.Ю. Никитин, *Асимптотическая эффективность непараметрических критериев* // М., Физматлит, 1995.
[3] Y.V. Egorov, *On a Kondratiev problem* // C.R.A.S. Paris. Ser. I, **324** (1997), 503-507.
[4] А.П. Буслаев, В.А. Кондратьев, А.И. Назаров, *Об одном семействе экстремальных задач и связанных с ним свойствах одного интеграла* // Мат. заметки. **64** (1998), N6, 830-838.
[5] А.И. Назаров, *О точной константе в обобщенном неравенстве Пуанкаре* // Теор. функ. и прилож. (ПМА. Вып.24), Нов., Т.Рожковская, 2002, 155-180.
[6] G. Croce, B. Dacorogna, *On a generalized Wirtinger inequality* // Discr. Contin. Dyn. Syst. **9** (2003), N5, 1329-1341.

Пространства Гельдера: о разрешимости в краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами аргументов в младших членах

Неверова Д. А.

Российский университет дружбы народов (Москва, Россия)

Будем предполагать, что $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂Q класса C^∞. Пусть также оператор $R_Q = P_Q R I_Q$, где I_Q представляет собой оператор продолжения нулем на $\mathbb{R}^n \setminus Q$, P_Q — оператор сужения на Q, оператор R определен по формуле

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x+h)$$

Здесь $\mathcal{M}$ — множество, состоящее из конечного числа векторов $h \in \mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, a_h — вещественные числа.

Мы будем рассматривать следующую задачу:

$$-\Delta u(x) + R_Q u(x) = f(x) \qquad (x \in Q) \tag{1}$$

с однородным условием Дирихле

$$u\big|_{\partial Q} = 0, \tag{2}$$

где $f(x) \in C^\sigma(\overline{Q})$, $(0 < \sigma < 1)$.

При предположении положительной определенности оператора $R_Q + R_Q^*$ доказано существование и единственность классического решения $u \in C^{2+\sigma}(\overline{Q})$ задачи (1), (2).

Список литературы

[1] *Skubachevskii A.* Elliptic functional differential equations and applications. Basel–Boston–Berlin: Birkhauser. — 1997.
[2] *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

Важность критериев в многокритериальных задачах принятия решений

Нелюбин А. П., Подиновский В. В.,** Потапов М. А.****

*Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН,
**Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"(ЛАВР),
***Институт автоматизации проектирования РАН (Москва, Россия)

В теории важности критериев, созданной и активно развиваемой в России, на основе строгих определений понятий "один критерий важнее другого"и "один критерий важнее другого во столько-то раз"разработаны методы сбора и анализа качественной и количественной информации о важности критериев и решающие правила, задающие отношения предпочтения на основе такой информации.

В докладе исследовано влияние введения предположения о существовании количественных оценок важности критериев на отношение предпочтения, порождаемое качественной информацией, которая позволяет упорядочить по важности все критерии.

Показано, что указанное предположение оставляет неизменным отношение предпочтения для критериев с порядковой шкалой, но расширяет такое отношение для критериев со шкалой первой порядковой метрики.

Этот результат следует иметь в виду при использовании известного подхода к моделированию предпочтений, основанного на использовании множественных оценок величин коэффициентов важности при неполной информации о важности критериев и характере изменения предпочтений вдоль их шкалы.

О приводимости нелинейного уравнения теплопроводности к линейному уравнению

Новикова Л. В.

Южный Федеральный Университет (Ростов-на-Дону, Россия)

Полиэдральные проективные задачи

Нурминский Е. А.

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН (Владивосток, Россия)

Задача ортогональной проекции состоит в нахождении минимального евклидового расстояния от заданной точки к множеству, определяемому некоторыми условиями. К этой задаче сводятся многие проблемы математической физики, вычислительной математики, математического программирования и их приложений. Наибольший практический интерес представляет собой проекция на выпуклые многогранные множества большой (10^4 и более) размерности, заданные различным образом. В докладе рассмотрены различные подходы к решению подобных задач, в том числе и с использованием новых вычислительных архитектур (кластеры, графические процессоры).

Сложность задачи оптимального быстродействия для маятника

Овсеевич А. И.

Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН (Москва, Россия)

Физический маятник, управляемый приложенным к шарниру моментом, описывается уравнением $\ddot{x} + \sin x = \varepsilon u$, $|u| \leq 1$, где x — угол отклонения маятника от вертикали, а ε — максимальная амплитуда управляющего момента. Рассматривается задача быстрейшего приведения маятника в состояние устойчивого равновесия. Оптимальное управление релейно, т.е. принимает значения $u = \pm 1$. В аналогичной задаче для линейного маятника на каждой оптимальной траектории имеется конечное число переключений управления, если же рассматривать все оптимальные траектории с произвольным начальным состоянием, то соответствующее количество переключений может быть сколь угодно велико. Мы показываем, что для нелинейного маятника имеется общая верхняя граница для количества переключений на всех оптимальных траекториях. Найдены точные по порядку величины оценки сверху и снизу для этого числа в ситуации, когда возможности управления малы. Главным результатом является асимптотика максимального числа переключений при стремлении параметра ε к нулю.

Теоремы вложения для пространств Соболева, связанные с интерполяционной конструкцией Лионса–Петре

Овчинников В. И.

Воронежский государственный университет (Россия)

Рассматриваются пространства Соболева функций в ограниченной области с липшицевой границей, построенные на основе перестановочно инвариантных пространств. Перестановочно инвариантная оболочка такого сорта пространств в общем виде описана во многих работах. В данной работе рассматриваются перестановочно инвариантные оболочки, т.е. оптимальные теоремы вложения для пространств Соболева, построенных с помощью обобщенных пространств средних Лионса–Петре с функциональным параметром для пары $\{L_1, L_\infty\}$. Таким образом рассматриваются все естественные в данной ситуации пространства Орлича и Лоренца с функциональными параметрами и др. Оказывается, что перестановочно инвариантная оболочка такого рода пространств является обобщенным пространством средних Лионса–Петре с соответствующими параметрами для пары $\{\Lambda_{1-\frac{m}{n}}, L_\infty\}$.

Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах: очерк общей теории

Орлов И. В., Халилова З. И.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

В недавних работах И. В. Орлова и Ф. С. Стонякина [1,2] было введено и исследовано понятие К-субдифференциала для отображений вещественного аргумента, который, в частности, оказался удобным инструментом при исследовании проблемы Радона - Никодима для интеграла Бохнера и позволил решить ее в классе пространств Фреше. В настоящем докладе обсуждается обобщение понятия К-субдифференциала на отображения, определенные в банаховых пространствах. При этом удается пройти по стандартной для анализа Фреше схеме, наполняя ее новыми понятиями:

– К-субдифференциал по направлению — компактное выпуклое множество;

– слабый К-субдифференциал — многозначный сублинейный оператор с компактными выпуклыми значениями (К-оператор);

– К-субдифференциал Гато — ограниченный по норме слабый К-субдифференциал;

– К-субдифференциал Фреше — дополнительное условие равномерной малости остаточного члена по направлениям.

Эта схема позволяет построить достаточно полный аналог классического сильного дифференциального исчисления в банаховых пространствах. Отметим несколько существенных моментов:

– возникает новый тип операторов — многозначные сублинейные операторы с компактными выпуклыми значениями (К-операторы). Ограниченные К-операторы образуют банахов конус;

– банахов конус ограниченных К-операторов играет роль, вполне аналогичную роли пространства линейных ограниченных операторов в классическом анализе Фреше;

– в категории банаховых конусов (более обширной, чем категория банаховых пространств) может быть построено замкнутое K-субдифференциальное исчисление;

– возникает ясная перспектива теории K-субдифференциалов высших порядков.

Литература

[1]. И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин. Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты // Современная математика: Фундаментальные направления. Т.34, 2009, с. 121 - 138.

[2]. I. V. Orlov, F. S. Stonyakin. Strong compact properties of the mappings and K-Radon - Nykodim property. // Methods of Functional Analisys and Topology. Vol. 16, 2010, no.2, 183 - 196.

[3]. З. И. Халилова. K-сублинейные многозначные операторы и их свойства // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Т. 24(63), № 1(2011), в печати.

О гильбертовых представлениях частично упорядоченных множеств

Островская О. В., Островский В. Л.

Национальный университет пищевых технологий (Киев, Украина),
Институт математики НАН Украины (Киев, Украина)

Основные факты относительно представлений конечных частично упорядоченных множеств в конечномерных линейных пространствах были получены в начале 70-х годов в работах киевской алгебраической школы. В частности, в работах А.В.Ройтера, Л.А.Назаровой, М.М.Клейнера и др. были выделены и изучены классы частично упорядоченных множеств конечного и ручного типов.

При переходе к изучению представлений ч.у.м. в гильбертовых пространствах естественно проводить их классификацию не с точностью до подобия, а с точностью до унитарной эквивалентности. Это резко сужает класс множеств, для которых удается получить структурные теоремы для представлений. Одним из дополнительных условий, позволивших расширить класс ч.у.м., для которых удается получить описанеие представлений, стало введенное в 2002 г. С.А.Кругляком, В.И.Рабановичем, Ю.С.Самойленко понятие ортоскалярности, которое для класса примитивных ч.у.м. позволило получить результаты, во многом похожие на алгебраический случай.

В непримитивном случае возникают принципиальные сложности, связанные, с одной стороны, с различными вариантами обобщения условия ортоскалярности на непримитивный случай, так и тем обстоятельством, что в общей ситуации применить технику функторов Кокстера, которая оказалась весьма эффективной в примитивном случае, пока не удается.

Мы изучаем примеры непримитивных ч.у.м., для которых удается описать с точностью до унитаной эквивалентности все неприводимые ортоскалярные представления. Для этого используется модифицированный вариант техники дифференцирования ч.у.м. по вершине. Показано, что в отличие от случая примитивных ч.у.м. в непримитивном случае могут возникать бесконечномерные неприводимые представления ч.у.м. ручного типа.

О парах операторов в линейных и гильбертовых пространствах

Островский В. Л., Самойленко Ю. С.
Институт математики НАН Украины (Киев, Украина)

В докладе будет приведен обзор результатов относительно структуры пар операторов в конечномерных линейных пространствах. Основное содержание доклада посвящено парам операторов, связанных квадратичным соотношением общего вида, подробно рассмотрены примеры соотношений. Показано, что во многих случаях задача классификации таких пар является дикой. Проведено сравнение со случаем пар самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, удовлетворяющих квадратичному соотношению. Работа выполнена при частичной поддержке гранта ГФФИ, проект № 40.1/008.

Доминантная эргодическая теорема в пространствах Орлича-Лоренца

Пашкова Ю. С., Муратов М. А., Рубштейн Б. А.
Таврический национальный университет (Симферополь, Украина),
Университет Бен Гуриона (Беер-Шева, Израиль)

Пусть $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ — пространства с бесконечной σ-конечной мерой и $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\mathbf{\Omega}, \mu)$, $1 \le p \le \infty$.

Пространство Орлича-Лоренца $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi} = \mathbf{\Lambda}_{W,\Phi}(\mathbf{\Omega}, \mu)$ с весовой функцией W определяется как

$$\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi} := \{f \in L_1 + L_\infty : \ \|f^* \circ W^{-1}\|_{\mathbf{L}_\Phi} < \infty\},$$

где $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Phi}$ — норма Орлича в пространстве Орлича $\mathbf{L}_\Phi$ и f^* — убывающая перестановка функции f на $[0, +\infty)$.

Мы предполагаем, что:

1). Функция Орлича $\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ возрастающая, непрерывная слева и выпуклая функция на $[0, +\infty)$, причем $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(x) > 0$ и $\Phi(y) < \infty$ для некоторых $x, y \in (0, +\infty)$.

2). Весовая функция $W : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — возрастающая, вогнутая функция, причем $W(0) = 0$ и $W(x) > 0$ для некоторого $x > 0$. (Функция W — абсолютно непрерывна на $(0, +\infty)$, хотя может иметь разрыв в точке $x = 0$).

Тогда $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi}$ с нормой

$$\|f\|_{W,\Phi} = \sup\left\{a > 0, \ \int\limits_0^\infty \Phi(af^*)\, dW) \le 1\right\}$$

является симметричным пространством функций на $(\mathbf{\Omega}, \mu)$. Оно совпадает с пространство Лоренца $\mathbf{\Lambda}_W$ при $\Phi(x) = x$ и с пространствов Орлича $\mathbf{L}_\Phi$ в случае $W(x) = x$. Если $\Phi(x) = x^q$, $\ W(x) = x^{\frac{q}{p}}$ и $1 \le q \le p < \infty$, то $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi} = \mathbf{L}_{p,q}$.

Пусть T — положительное абсолютное сжатие в пространстве $(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\mathbf{\Omega}, \mu)$ и

$$A_{n,T} f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f, \quad B_T f = \sup_{n \ge 1} A_{n,T} |f|.$$

Теорема 1. *(Доминантная эргодическая теорема) Следующие два условия эквивалентны:*

1). $B_T f \in L_{W,\Phi}$ для любой $f \in L_{W,\Phi}$ и любого положительного абсолютного сжатия T.

2). $p_{\Phi_0} > 1$, где p_{Φ_0} — индекс растяжения функции

$$\Phi_0(x) = \Phi(W(x^{-1})^{-1}),$$

т.е.

$$p_{\Phi_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln M_{\Phi_0}(x)}{\ln x}, \quad M_{\Phi_0} = \sup_{0<y<\infty} \frac{\Phi_0(xy)}{\Phi_0(y)}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке гранта ГФФИ, проект № 40.1/008.

Теорема Марченко об асимптотике спектральной меры оператора Штурма-Лиувилля

Печенцов А. С., Попов А. Ю.

МГУ им. М.В Ломоносова (Москва, Россия)

Основная цель цикла лекций — изложение доказательства наиболее сильной теоремы об асимптотике спектральной меры оператора Штурма-Лиувилля в $L^2(0, +\infty)$. Марченко доказал её в 1990 г. Он вывел асимптотику в случае произвольного локально суммируемого потенциала и граничного условия $y'(0) = 0$. Мы переносим её на обобщённые потенциалы, являющиеся производными функций, имеющих на любом отрезке ограниченную вариацию. Граничное условие также более общее: $y'(0) - hy(0) = 0$.

Оценка влияния реакций активации и ингибирования факторов свертывания крови на скорость автоволны в модельной задаче

Погорелова Е. А., Лобанов А. И.

Московский физико-технический институт (Россия)

Для изучения свертывания крови при планировании экспериментов необходимо выделить круг переменных, изменяя значения которых, можно наиболее эффективно воздействовать на процесс свертывания. В работе исследована модель свертывания крови из 24 уравнений типа "реакция-диффузия имеющая автоволновое решение. Применяется метод численной оценки скорости автоволны свертывания по пространственному распределению компонентов. По нашим оценкам, в рассматриваемой модели на скорость автоволны свертывания наибольшее влияние оказывают реакции активации тромбина и протромбина, фактора IIaM, реакция ингибирования антитромбина ATIII. Получена аналитическая зависимость скорости автоволны свертывания от коэффициентов диффузии протромбина, ATIII, тромбина, и тромбина, связанного с α_2-макроглобулином. Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-1512.2010.9

Теоремы о среднем для решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными

Покровский А. В.

Институт математики НАН Украины (Киев, Украина)

Рассматриваются теоремы о среднем, характеризующие непрерывные слабые решения однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, левая часть которых является квазиоднородным линейным дифференциальным оператором с частными производными.

Об оценках собственных значений несамосопряженного оператора четвертого порядка

Поляков Д. М.

Воронежский государственный университет (Россия)

Рассматривается применение метода подобных операторов к спектральному анализу несамосопряженного дифференциального оператора четвертого порядка. Для данного оператора получена асимптотика собственных значений

Некоторые свойства операторов $(C, 1)$ суммирования рядов Фурье-Виленкина-Качмажа

Поляков И. В.

МГУ им. Ломоносова (Москва, Россия)

Для системы Уолша в нумерациях Пэли и Качмажа известно, что мажоранта операторов $(C, 1)$ суммирования имеет слабый тип $(1, 1)$. Из этого следует, что для всякой интегрируемой функции Чезаровские средние ее ряда Фурье-Уолша по любой из этих нумераций сходятся к данной функции почти всюду. Автором доказано аналогичное утверждение для системы Виленкина-Качмажа.

Гладкость обобщенных эллиптических решений дифференциально-разностных уравнений с вырождением вблизи границ подобластей

Попов В. А.

Российский университет дружбы народов (Москва, Россия)

Изучается гладкость обобщенных решений краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением следующего вида

$$\begin{aligned} &-\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{ij}\right) u(x) = f(x), && (x \in Q \subset \mathbb{R}^n,\ \partial Q \in C^\infty), \\ &u(x) = 0, && (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q). \end{aligned}$$

В работе доказано, что проекция обобщенного решения на образ разностного оператора обладает некоторой гладкостью, но не во всей области Q, а в некоторых подобластях вплоть до границ подобластей, за исключением некоторых окрестностей точек сопряжения.

Соотношения между K-функционалами и модулями гладкости

Радзиевская Е. И.

Национальный университет пищевых технологий (Киев, Украина)

Пусть $r \in \mathbb{N}$, f – комплекснозначная функция, заданная на отрезке вещественной оси, $\omega^{[r]}(\delta, f)_{L_p[a;b]}$ – r-ый модуль гладкости. В случае $f \in C[a; b]$ полагаем $\omega^{[r]}(\delta, f)_{C[a;b]} := \omega^{[r]}(\delta, f)_{L_\infty[a;b]}$, а для $r = 1$ будем использовать обозначения $\omega(\delta, f)_C := \omega^{[1]}(\delta, f)_C$.

Рассмотрим конечную систему функционалов $\{U_j\}$ вида

$$U_j(g) := \int_0^1 g^{(K_j)}(\tau) d\sigma_j(\tau) + \sum_{l=0}^{K_j-1} C_{j,l} g^{(l)}(0), \tag{1}$$

где σ_j принадлежит множеству функций ограниченной вариации, заданной на отрезке $[0;1]$. Число K_j называется порядком функционала U_j и обозначается $ord\ U_j$.

Пусть X одно из пространств L_p или l. Тогда для $\delta > 0$ и $f \in X$ зададим два K-функционала

$$K(\delta, f; X, W_U^r(X)) := \inf_{g \in W_U^r(X)} (\|f-g\|_X + \delta\|g\|_{W^r(X)}),$$

$$K(\delta, f; X, W_U^r(X)) := \inf_{g \in \widetilde{W}_U^r(X)} (\|f-g\|_X + \delta\|g\|_{W^r(X)}),$$

где $W_U^r(X) := \{g \in W^r(X) : U_j(g) = 0, ord\ U_j \leqslant r\}$ и $\widetilde{W}_U^r(L_p) := W_U^r(L_p)$

$$\widetilde{W}_U^r(l) := \{g \in W^r(l) : U_j(g) = 0, ord\ U_j \leqslant r\}.$$

В введенных обозначениях справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $\{U_j\}$ – пустая или конечная система функционалов вида (1). Если система $\{U_j\}$ не пуста, то считаем, что функции σ_j из (1) удовлетворяют условию: каждая σ_j имеет хотя бы одну точку скачка, причем всем функционалам U_j, у которых порядки совпадают, можно сопоставить разные точки скачка функции σ_j. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется положительная постоянная $c(n, U)$, не зависящая от $X = L_p$ или $X = C$ и от $r = 1, \ldots, n$, для которой выполнена оценка

$$K(\delta^n, f; X, \widetilde{W}_U^r(X)) \leqslant c(n, U)\delta^r\|f\|_{W^r(X)},\ 0 < \delta \leqslant 1,\ \delta \in W_U^r(X).$$

Теорема 2. Пусть $n,\ r \in \mathbb{N},\ r \leqslant n$ и система функционалов $\{U_j\}$ удовлетворяет условию теоремы 1 и не содержит функционалов, порядки которых меньше r. Тогда найдется положительная постоянная $c(n; U)$, не зависящая от $X = L_p$ или $X = C$, для которой

$$K(\delta^n, f; X, \widetilde{W}_U^r(X)) \leqslant c(n, U)(\omega^{[r]}(\delta, f)_X + \delta^r\|f\|_X),\quad 0 < \delta \leqslant 1,\ f \in X.$$

Об одной модели рынка

Рачинский Е. В.

Воронежский государственный университет (Россия)

Целью данной работы является построение математической модели, которая на основе постоянной, на каждом шаге (купля-продажа части пакета), стратегии игрока на рынке, позволяет получить периодическое колебание математического ожидания объемов продаж и цены. Оказывается, что эти математические ожидания являются в нашем случае решениями уравнения Ван дер Поля. Это обстоятельство позволяет рассмотреть явление нелинейного резонанса на рынке, связанное с его раскачкой, вызванной периодическими продажами и покупками малых пакетов ценных бумаг.

Фундаментальные системы компактов в интегральных пространствах

Романенко И. А.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
(Симферополь, Украина)

Дается описание подходящих фундаментальных систем компактов в общих интегральных пространствах L_p и пространствах Соболева $W^{n,p}$ функций одной переменной на отрезке. С этой целью введено понятие *ω-эллипсоида*, определяемого с помощью интегрального модуля непрерывности в $L_p[a;b]$ (соответственно, в $W^{n,p}[a;b]$), и рассмотрены основные свойства ω-эллипсоидов. Показано, что компактные ω-эллипсоиды (*ω-компакты*) образуют фундаментальную систему компактов, то есть поглощают все остальные компакты в L_p. Подпространства, порожденные ω-компактами, образуют σ-индуктивную шкалу банаховых пространств с компактными вложениями, индуктивный предел которой совпадает с исходным пространством. Также показана плотность вложений таких подпространств в исходное пространство и эквивалентность непрерывного и векторного вложений.

Спектральный анализ оператора Дирака в лебеговых пространствах

Романова Е. Ю.

Воронежский государственный университет (Россия)

Рассматривается оператор Дирака в лебеговых пространствах. Получены теоремы об асимптотике спектра оператора Дирака и о сходимости спетральных разложений. В отличие от исследования оператора Дирака в пространстве $L_2([0,\pi],\mathbb{C}^2)$, где наравне с методом подобных операторов использовались методы гильбертовых пространств, для получения выше указанных результатов в данных условиях широко применялись методы гармонического анализа и также метод подобных операторов.

О числовой области генератора полугруппы

Романова М. Ю.

Воронежский государственный университет (Россия)

Рассматривается полугруппа операторов, числовая область генератора которой покрывает всю комплексную плоскость. Показывается, что такая полугруппа операторов ограничена.

Гладкость и аппроксимационные процессы в шкале пространств L_p

Руновский К. В.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Рассматриваются вопросы тригонометрической аппроксимации классическими средними Фурье, интерполяционными методами, а также семействами линейных полиномиальных операторов. Изучаются вопросы их сходимости в полной шкале пространств L_p, где $0 < p \leq +\infty$. Скорость приближения изучается в терминах обобщенных K-функционалов и модулей гладкости. Рассматриваются вопросы приложений полученных результатов к теории обработки данных и сигналов.

Свойства корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов

Рыхлов В. С.

Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского (Россия)

В пространстве суммируемых с квадратом функций на конечном отрезке рассматривается полиномиальный пучок обыкновенных дифференциальных операторов, порожденный однородным дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами и двухточечными краевыми условиями общего вида. Приводятся результаты и обсуждаются методы их получения о кратной полноте и неполноте корневых функций этих пучков, о базисности Рисса корневых функций, о разложении в биортогональные ряды по корневым функциям.

О спектре дифференциальных операторов на периодических графах

Сабурова Н. Ю.

Северный (Арктический) федеральный университет (Архангельск, Россия)

Рассматриваются дифференциальные операторы второго и четвертого порядка с произвольными коэффициентами из пространства $L^2(0,1)$, действующие на произвольном периодическом графе. Описывается процедура нахождения дисперсионного соотношения (соотношения между спектральным параметром задачи и квазиимпульсом). Из этого соотношения можно получить функции Ляпунова и использовать их для описания абсолютно непрерывного спектра оператора на графе. Приводятся примеры нахождения функций Ляпунова для операторов второго и четвертого порядка с заданными коэффициентами с помощью описанной процедуры.

УрЧП первого порядка

Самборский С. Н.

University of Caen (France)

О числе совершенных (n,3)-кодов

Сапоженко А. А.

МГУ им. Ломоносова (Москва, Россия)

Цель сообщения состоит в улучшении верхней оценки С. В. Августиновича [1] для числа совершенных кодов. Улучшение получено с использованием оценок числа независимых множеств, полученных В. Е. Алексеевым [2] и А. А. Сапоженко [3].

1. Августинович С. В. *Об одном свойстве совершенных двоичных кодов* Дискрет. анализ и исслед. опер., Сер. 1, 1995, Т. 2, № 1. с. 4–6.

2. В.Е.Алексеев В. Е., *Верхняя оценка числа максимальных независимых множеств графа* Дискретная математика, 2007, Т. 19, № 2. с. 84–89.

3. Сапоженко А. А., *Верхняя оценка числа независимых множеств графах* ДАН 2007, Т. 414, № 6. — с. 1–3.

Сингулярные операторы Штурма-Лиувилля с негладкими коэффициентами в пространстве вектор-функций

Сафонова Т. А.

Северный (Арктический) Федеральный Университет имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия)

В последние годы активному изучению подвергаются операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространства распределений (типа δ-функции). К их изучению приводят, например, некоторые задачи квантовой физики. В докладе рассматриваются векторные операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями на полуоси, а именно, даётся корректное определение таких операторов, и приводятся достаточные условия минимальности и максимальности их дефектных чисел в терминах элементов матричных потенциалов. Кроме того, установлено, что условие максимальности дефектных чисел векторного сингулярного дифференциального оператора Штурма-Лиувилля (в случае, когда элементы матричного потенциала являются ступенчатыми функциями с бесконечным числом скачков) равносильно условию максимальности дефектных чисел разностного оператора, порождённого некоторой обобщённой якобиевой матрицей в пространстве l_n^2. Построены примеры сингулярных операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями в пространстве вектор-функций с максимальным дефектным числом.

О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях первого порядка, неразрешённых относительно производной.

Сёмкина Е. В.

Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского (Симферополь, Украина)

Рассматривается задача Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка, где коэффициент при производной - положительный компактный оператор. Для этой задачи получена теорема о существовании и единственности сильного решения.

Рассмотрен также важный частный случай задачи, когда подынтегральные оператор-функции имеют специальный вид. Для этого случая получена теорема о существовании и единственности сильного решения. Специальный вид подынтегральных оператор-функций позволяет кроме задачи Коши рассмотреть соответствующую спектральную задачу. Для спектральной задачи сформулирован ряд утверждений о структуре спектра, а также о свойствах собственных элементов, соответствующих собственным значениям.

Численный анализ дзета-функции Римана и ее производных

Скороходов С. Л.

Учреждение РАН Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН (Москва, Россия)

На основе диагональных аппроксимаций Паде построен эффективный метод вычисления дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и ее производных. Численный анализ $\zeta(s)$-функции в области $\mathcal{G}$, включающей критическую полосу, выявил ряд закономерностей в расположении нулей $\zeta(s)$-функции и ее производных $\zeta^{(m)}(s)$. Показано, что нули функций $\zeta(s) - 1$ и $\zeta^{(m)}(s)$ упорядочиваются по сериям, лежащим на выявленных кривых, причем в каждой серии расстояние между соседними нулями производных $\zeta^{(m)}(s)$ и $\zeta^{(m+1)}(s)$ почти постоянно. Доказаны теоремы об оценке правых границ нулей функций $\zeta(s) - 1$, $\zeta'(s)$ и $\zeta''(s)$. Приведены обширные численные результаты.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-00837) и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН №3.

Волновые потоки при учете турбулентной вязкости и диффузии

Слепышев А. А., Подрыга В. О.

Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Севастополе (Севастополь, Украина), МГУ имени М.В.Ломоносова (Москва, Россия)

Асимптотическим методом многомасштабных разложений исследуются нелинейные эффекты при распространении внутренних волн при учёте турбулентной вязкости и диффузии. В первом порядке малости по крутизне волны находятся решения линейного приближения, дисперсионное соотношение и декремент затухания волны на турбулентности. Во втором порядке малости по крутизне волны находится среднее течение, индуцированное волной за счёт нелинейности и вертикальная составляющая скорости стоксова дрейфа, которая при учёте турбулентной вязкости и диффузии отлична от нуля. Определяются волновые потоки тепла, соли за счёт фазового сдвига колебаний температуры, солености и вертикальной скорости в волне. Указанные потоки сравниваются с потоками за счёт вертикальной составляющей скорости стоксова дрейфа и анализируется их вклад в суммарный волновой перенос. Показано, что волновые потоки на шельфе могут превосходить соответствующие турбулентные потоки и возрастают при уменьшении глубины моря при неизменной амплитуде и частоте волны.

Оценка нормы оператора, обратного к дифференциальному

Слоущ В. А.

Санкт-Петербургский государственный университет (Россия)

Речь пойдет об операторе вида $\mathbb{T}_{fg} := f(H)g(x)$. Здесь $H = -\mathrm{div} g(x) \mathrm{grad} + p(x)$ — равномерно эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 1$, с вещественными ограниченными коэффициентами; $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, — борелевская ограниченная функция; g — измеримая функция из $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Не исключается случай таких функций f и g, что оператор $\mathbb{T}_{fg}$ является оператором Гильберта-Шмидта. В работе даны оценки сингулярных чисел оператора $\mathbb{T}_{fg}$ в терминах функций f и g. Требования на гладкость коэффициентов оператора H не накладываются. Диагонализация (частичная) оператора H не предполагается известной.

Свойства корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов

Смирнов А. И.

Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова (Москва, Россия)

Рассматривается нелинейная задача оптимального управления с интегральным функционалом, в котором подынтегральная функция содержит характеристическую функцию заданного замкнутого множества из фазового пространства. При помощи метода аппроксимаций для данной задачи без каких-либо априорных предположений о характере поведения оптимальной траектории доказаны необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Существование нулевого риска

Смирнова Л. В.

ГОУ ВПО "Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности"(Москва, Россия)

Рассматривается принятие решения в однокритериальной задаче при неопределенности. В качестве показателя риска выбрана функция сожаления (из принципа минимаксного сожаления). Она представляет собой разность между максимальным (по альтернативам) значением функции полезности и ее реализовавшмся значением. Доказано, что существует альтернатива, при которой функция сожаления обращается в нуль при любой неопределенности тогда и только тогда, когда функция сожаления имеет седловую точку (минимум по альтернативам, максимум по неопределенностям).

Условие K-трансверсальности в пространствах Соболева

Смирнова С. И.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Показано, что классическое необходимое условие трансверсальности, возникающее при исследовании на локальный экстремум одномерных вариационных функционалов с подвижной границей в пространствах гладких функций, сохраняется (в “почти всюду” - форме) как необходимое условие компактного экстремума (K-экстремума) для аналогичных функционалов в пространствах Соболева.

Задачи со свободной границей для уравнений магнитной гидродинамики

Солонников В. А.

Математический Институт им. В.А.Стеклова в Санкт-Петербурге (Санкт-Петербург, Россия)

Доказывается локальная разрешимость простейших нестационарных задач со свободной границей, описывающих движение вязкой несжимаемой проводящей капиллярной жидкости. Рассматриваются случаи, когда решение может быть продолжено на бесконечный интервал времени.

Некоторые особенности эллиптических задач с p-лапласианом, возмущенным разностным оператором, при p>2

Солонуха О. В.

Центральный экономико-математический институт РАН (Москва, Россия)

Линейные функционально-дифференциальные уравнения эллиптического типа хорошо изучены, предложены критерии их разрешимости, см. [1], например, задачи с лапласианом (p=2), возмущенным разностным оператором. Критерии разрешимости существенно нелинейных функционально-дифференциальных уравнений зачастую отличаются от линейного случая. В работе рассмотрен критерий разрешимости задачи с p-лапласианом при p>2.

А также предлагаются примеры качественного различия множеств решений задач при p>2 и p=2.

Исследование поддержано РФФИ (грант 09-01-00586).

[1] Skubachevskii A.L. *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

Об одной системе линейных существенно бесконечномерных уравнений

Статкевич В. М.

Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт” (Киев, Украина)

Пусть $(Lu)(x) = j(u''(x))$ – существенно бесконечномерный эллиптический оператор [1] (обобщение оператора Лапласа-Леви). Если классическая система линейных алгебраических уравнений имеет решения, то решения выписываются в явном виде. Подобный подход можно также применить в случае, когда числовые коэффициенты заменяются на многочлены от оператора L.

1. Богданский Ю.В. Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Укр. мат. журнал. – 1977. – 29, №6. – С. 781-784.

Об одной оптимизационной задаче для моделей Леонтьева

Стецюк П. И., Кошлай Л. Б.

Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАНУ (Киев, Украина)

Рассматривается задача нелинейного программирования с билинейной целевой функцией и ограничениями, включающими соотношения прямой, двойственной моделей Леонтьева и два квадратичных равенства с диагональными матрицами. Показано, что если матрица Леонтьева продуктивна, то множество решений задачи может быть описано с помощью собственных векторов, соответствующих максимальным собственным числам некоторых симметричных матриц. Если матрица Леонтьева продуктивна и неразложима, то задача имеет единственное решение. Разработан итерационный алгоритм нахождения такого решения, приведены расчеты для агрегированного 15-отраслевого баланса Украины. Проанализирована связь задачи с моделями М.В. Михалевича для структурно-технологических изменений с учетом индексов цен.

О дифференцируемости по верхнему пределу неопределённого интеграла Петтиса

Стонякин Ф. С.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Известно, что неопределённый интеграл Петтиса отображений вещественного отрезка I в бесконечномерные пространства теряет свойство дифференцируемости почти всюду. Это означает, что естественной и актуальной является задача поиска условий на подинтегральное отображение, при которых неопределённый интеграл Петтиса будет дифференцируемым почти всюду на I.

Для её решения исследуются две новые характеристики интегрируемых по Петтису отображений вещественного отрезка в пространства Фреше: слабая интегральная ограниченность и σ-компактная измеримость. Получено достаточное условие дифференцируемости неопределённых интегралов Петтиса в терминах слабой интегральной ограниченности, а также необходимое условие — в терминах σ-компактной измеримости.

Оценки элементов матриц обратных операторов

Струков В. Е.

Воронежский государственный университет (Россия)

С использованием изометрических абелевых групп операторов в банаховых алгебрах вводится понятие ряда Фурье и матрицы оператора. Основным результатом являются оценки норм коэффициентов Фурье и матричных элементов обратных операторов при выполнении определенных условий, накладываемых на нормы коэффициентов Фурье исходного оператора.

Теорема Винера для периодических на бесконечности функций

Струкова И. И.

Воронежский государственный университет (Россия)

Определяется банахова алгебра периодических на бесконечности функций. Для таких функций вводится понятие ряда Фурье и его абсолютной сходимости. Получен аналог теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье для периодических на бесконечности функций.

Математическое ожидание решения уравнения диффузии с пятью случайными коэффициентами

Сумера С. С.

Воронежский государственный технический университет (Россия)

Рассматривается начальная задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка со случайными коэффициентами

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \varepsilon_1(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_3^2} + \varepsilon_2(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_1} + \varepsilon_3(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_2} + {}$$

$$+\varepsilon_4(t)u(t,x) + f(t,x), \tag{1}$$

$$u(t_0,x) = u_0(x). \tag{2}$$

Здесь $t \in T = [t_0,t] \subset \mathbb{R}$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, u – искомая функция, $\varepsilon_j(t) > 0$, $j = \overline{1,4}$, f – случайные процессы, u_0 – случайное поле, независимое с ε_j и f, предполагается, что ε_j и f заданы характеристическим функционалом.

Получена формула для вычисления математического ожидания решения задачи (1), (2).

Операторные оценки погрешности в задачах усреднения эллиптических периодических дифференциальных операторов

Суслина Т. А.

Санкт-Петербургский государственный университет (Россия)

Изучается широкий класс матричных эллиптических дифференциальных операторов B_ε второго порядка, действующих в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и заданных выражением

$$B_\varepsilon u = b(D)^* g(x/\varepsilon) b(D) u + \sum_{j=1}^{d} \big(a_j(x/\varepsilon) D_j u + D_j a_j^*(x/\varepsilon) u\big) + Q(x/\varepsilon) u, \quad \varepsilon > 0.$$

Коэффициенты $g(x)$, $a_j(x)$ и $Q(x)$ периодичны относительно некоторой решетки, матрица $g(x)$ ограничена и равномерно положительно определена, коэффициенты $a_j(x)$ и $Q(x)$, вообще говоря, неограничены. Старшая часть оператора задана в факторизованной форме; $b(D)$ — матричный однородный дифференциальный оператор первого порядка.

Изучается поведение резольвенты оператора B_ε в пределе малого периода $\varepsilon \to 0$. Получены аппроксимации этой резольвенты по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, а также по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Оценки погрешности точны по порядку. Общие результаты применяются к конкретным операторам математической физики.

Некоторые вопросы линеаризации сильно демпфированных пучков

Сухочева Л. И.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

Рассматривается задача, в определенном смысле "обратная" задаче линеаризации квадратичных операторных пучков. Как известно, один из подходов изучения спектральных свойств пучков заключается в построении оператора — линеаризатора, который "наследует" свойства пучка. Предлагается по произвольному положительному оператору, действующему в пространстве с индефинитной метрикой, построить операторный пучок, так что, данный оператор будет являться его линеаризатором. Поставленная задача решается в классе сильно депфированных пучков.

Определение. Пучок $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$ назывется сильно демпфированным, если $(Bf,f)^2 - 4(f,f)(Cf,f) > 0$ (для всех $f \neq 0$).

Основным результатом является следующая

Теорема. Пусть A — равномерно положительный оператор в пространстве Крейна. Тогда $A - \alpha I$ будет линеаризатором сильно демпфированного пучка тогда и только тогда, когда $\alpha > \max\{\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Управление переходными процессами в дифференциальных уравнениях

Терновский В. В., Хапаев М. М.

Московский государственный университете им. М.В. Ломоносова (Россия)

В настоящее время быстродействие электронных устройства подошло к своему физическому пределу, связанному с конечной скоростью перемещения носителей заряда, явлениями самоиндукции и т.д. Возникает вопрос, на который авторы отвечают утвердительно: возможно ли управлять нелинейными устройствами и сократить время переходного процесса? На примере нелинейных уравнений математического маятника и уравнения Ван Дер Поля изучаются процессы управления. Численный метод поиска неизвестной управляющей функции разработан в соответствии с методикой решения обратных некорректных задач при условии компактности множества достижимости. Обычная практика минимизации регуляризирующего (сглаживающего) функционала несостоятельна в задачах управления с возможными разрывными решениями, так как придется "угадывать"разрывное управление в гладких кривых, исчезают точки переключения. Новый метод сводится к минимизации функционала времени с локальными и интегральными ограничениями. В свою очередь, в интегральные ограничения входят неизвестные фазовые переменные, являющиеся решением краевой задачи. Метод позволяет решать задачи с особыми и неизмеримыми управлениями.

О ковариантности кватернионного уравнения Дирака

Тышкевич Д. Л., Карпенко И. И.

ТНУ им. Вернадского (Симферополь, Украина)

Изучается кватернионное уравнение Дирака, с дираковскими матрицами в дираковском представлении, но рассматриваемыми в контексте кватернионной алгебры матриц. Доказан аналог классической теоремы о ковариантности спиноров, т.е. (говоря простыми словами) что после определенного матричного преобразования решение уравнения Дирака от новых координат (релятивистски преобразованных старых) снова будет решением; такая (спинорная) матрица при определенных условиях (аналогичных условиям для комплексного случая) определяется по матрице релятивистского преобразования (элементу общей группы Пуанкаре) с точностью до знака как и в комплексном случае (т.е. группа спинорных матриц дважды накрывает группу Пуанкаре). Найден вид спинорных матриц для обычных и гиперболических поворотов, пространственного отражения и отражения времени. Найден вид генератора группы спинорных матриц.

Об аналоге теоремы Жордана – Дирихле для разложений по собственным функциям одного класса интегральных операторов

Халова В. А.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (Россия)

Получен аналог теоремы Жордана – Дирихле о сходимости разложений по собственным функциям оператора $Af = \alpha \int\limits_0^x f(t)\,dt + \int\limits_0^{1-x} f(t)\,dt + \sum\limits_{k=1}^m (v_k, f) g_k(x)$, где $(v_k, f) = \int\limits_0^1 v_k(t) f(t)\,dt$, $\{v_k(t)\}_1^m$, $\{g_k'(x)\}_1^m$ — линейно-независимые системы функций.

О факторизации операторов

Хацкевич В. А., Сендеров В. А.
ORT Braude Academic College (Karmiel, Izrael)

Пусть $\mathcal{K}$ — открытый единичный шар пространства $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$.

Формула

$$A_{21} + A_{22}K_+ = K'_+(A_{11} + A_{12}K_+),$$

где $K_+, K'_+ \in \mathcal{K}$ и $A_{ij} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_j, \mathfrak{H}_i)$ при $i, j = 1, 2$, определяет в $\mathcal{K}$ дробно-линейное отношение (д.л.отн.) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A = \{K_+, K'_+\}$.

Теорема 1. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Следующие утверждения эквивалентны:

a) линеал $A^*\mathfrak{H}_1$ равномерно положителен;

b) $A_{12} = A_{11}K^*$ при некотором $K \in \mathcal{K}$;

c) A допускает факторизацию

$$A = BU,$$

где U J-унитарен, $B_{12} = 0$.

С помощью этой теоремы доказывается

Предложение 2. Пусть A — строгий плюс-оператор, $A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^* \geq 0$. Тогда множество $\mathcal{F}_A(\overline{\mathcal{K}})$ выпукло и компактно в с.о.т.

Малые движения системы вязких стратифицированных жидкостей

Цветков Д. О.
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Изучается задача о малых движениях системы состоящей из двух тяжелых вязких стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд, плотности, которых в состоянии равновесия имеют устойчивую стратификацию.

Проведено построение, которое позволяет получить аналог известного ортогонального разложения Вейля, пространства вектор-функций суммируемых с квадратом по области, приспособленного к исследованию данной задачи. Путем проектирования уравнений движения на соответствующие ортогональные подпространства и введения вспомогательных краевых задач и их операторов начально-краевая задача, описывающая малые движения данной гидродинамической системы, проводится к задаче Коши. Используя известные теоремы о разрешимости абстрактно параболических уравнений, удается доказать теорему о существовании и единственности сильного решения исходной начально-краевой задачи.

Многокритериальная трехиндексная задача о назначениях

Чернышова Г. Д., Малюгина М. А., Медведев С. Н.
Воронежский государственный университет (Россия)

Рассматривается задача комплектования штатов на нескольких предприятиях одновременно. С целью обеспечения равномерности затрат предложен минимаксный критерий. Показана возможность использования двойственного алгоритма Удзавы.

Функция растяжения времени в линейных дифференциальных играх преследования

Чикрий Г. Ц.

Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАНУ (Киев, Украина)

В работе исследуется игровая задача о мягкой встрече двух управляемых линейных дифференциальных систем второго порядка различного типа. С помощью построенной так называемой функции растяжения времени были выведены достаточные условия завершения игры за конечное время при любых начальных условиях и указан способ построения управления преследователя на основании управления убегающего в прошлом.

Ускорение итераций для автономной нетеровой краевой задачи методом Ньютона

Чуйко С. М., Пирус О. Е.

Славянский государственный педагогический университет (Славянск, Украина)

В случае автономных нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений определены конструктивные условия существования и предложены сходящиеся итерационные алгоритмы, являющиеся модификациями метода Ньютона и построенные с использованием техники наименьших квадратов. Выделен частный критический случай, характерной особенностью которого является наличие кратных корней уравнения для порождающих констант.

Для нахождения решения $z(t,\varepsilon) \in C^2[a, b(\varepsilon)],\ C[0,\varepsilon_0],\ b(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$ задачи

$$z'' = Az + f + \varepsilon Z(z, z', \varepsilon),\ \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{1}$$

при $\varepsilon = 0$ обращающегося в решение порождающей краевой задачи

$$z_0'' = Az_0 + f,\ A, B \in \mathbb{R}^{n\times n},\ f \in \mathbb{R}^n,\ \ell z_0(\cdot) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^m \tag{2}$$

построена итерационная процедура по схеме Ньютона. Здесь $Z(z, z', \varepsilon)-$ нелинейная функция, непрерывно-дифференцируемая по z и z' в окрестности решения порождающей задачи и непрерывно-дифференцируемая по ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot,\varepsilon)-$ линейный и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$ нелинейный векторный функционалы, причем второй функционал непрерывно-дифференцируем по z, z' и по ε окрестности решения задачи (2) и на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. В критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) при условии $P_{Q^*}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0$ порождающая задача (2) имеет семейство решений [1]

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f;\alpha\Big](t),\ X_r(t) = X(t)P_{Q_r},\ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $Q = \ell X(\cdot)-$ $(m\times n)-$ матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1,\ n - n_1 = r$, $P_{Q^*}-$ $(m\times m)-$ матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$, $X(t)-$ фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2); $P_{Q_r}-$ $(n\times r)-$ матрица, составленная из $r-$ линейно-независимых столбцов $(n\times n)-$ матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$; $K[f](t)$ — оператор Грина задачи Коши, $G[f;\alpha](t)$ — обобщенный оператор Грина [1] задачи (2). Предположим, что выполнены условия разрешимости [1,2] нелинейной задачи (1); при этом для построения решения $z(t,\varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t,\varepsilon)$ задачи (1) в малой окрестности порождающего решения $z_0(t, c_r^*)$ может быть использована система [2] $x(t,\varepsilon) = \Phi x(t,\varepsilon)$. Для нахождения решений задачи (1) построена новая итерационная процедура, сходящаяся при условии $2\cdot\gamma_1(\varepsilon)\cdot\gamma_2(\varepsilon)\cdot\gamma_3(\varepsilon) < 1$. Здесь

$\varphi x(t,\varepsilon) = \Phi x(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon)$; величины $\gamma_1(\varepsilon), \gamma_2(\varepsilon), \gamma_3(\varepsilon)$ гарантируют выполнение неравенств $||(\varphi'_z\ z_0)^{-1}|| \leq \gamma_1(\varepsilon)$, $||\varphi\ z_0|| \leq \gamma_2(\varepsilon)$, $||\varphi''_{z^2}\ z|| \leq \gamma_3(\varepsilon)$.

1. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. 1992. — **28**, № 10. — С. 1668 — 1674.

2. *Чуйко С.М.* Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи // Нелинейные колебания. 2006. **9**. № 3, С. 416 – 432.

Моделирование пиковых загрузок транспортных сетей на основе теории равновесия

Шамрай Н. Б.

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН (Владивосток, Россия)

В ситуации массовой автомобилизации подавляющее большинство участников движения в улично-дорожной сети (УДС) города составляет легковой автотранспорт, совершающий преимущественно маятниковые поездки место проживания–место работы и обратно. Именно такие поездки создают утренние и вечерние пиковые нагрузки на УДС. Как правило, водители такого транспорта самостоятельно выбирают схему своего движения с учетом минимизации индивидуальных издержек.

В работе рассматривается экономико-математическая модель распределения самоорганизующихся транспортных потоков в основе которой лежит бескоалиционное равновесие Нэша. Описывается опыт исследования таких задач с помощью теоретического и алгоритмического аппаратов вариационных неравенств, дана оценка адекватности модели на примере УДС Владивостока.

Поперечники выпуклых компактов и некоторые задачи теории операторов

Шульман В. С.

Вологодский Государственный Технический Университет (Россия)

Колмогоровские поперечники $d_n(K,X)$ выпуклого множества K в банаховом пространстве X определяются формулой

$$d_n(K,X) = \inf_{L\in\mathcal{S}_n} \sup_{x\in K} \operatorname{dist}(x,L),$$

где $\mathcal{S}_n$ - множество всех подпространств размерности n в X. Теория поперечников имеет многочисленные приложения в геометрии банаховых пространств, теории операторных идеалов и, прежде всего, в современной теории приближений. Мы рассмотрим связи этой теории с теорией линейных операторных уравнений, геометрией обобщенных операторных шаров, теорией операторов в пространствах с двумя нормами, теорией представлений, теорией паразамкнутых подпространств. Среди внутренних задач теории будут рассмотрены зависимость поперечников от выбора объемлющего пространства, а также (тесно связанный с этим) вопрос о соотношениях между поперечниками компакта и его образа при вполне непрерывном линейном отображении.

К спектральному анализу оператора Шредингера с сингулярным потенциалом

Щербаков А. О.

Воронежский государственный университет (Россия)

Рассматривается применение метода подобных операторов к спектральному анализу оператора Шредингера $L_\theta : D(L_\theta) \subset L^2[0,\pi] \to L^2[0,\pi]$ с периодическим сингулярным потенциалом $v \in H^{-1}[0,\pi]$ вида $v = q'$, где $q \in L^4[0,\pi]$. Данный оператор задается дифференциальным выражением $l_q(y) = -(y^{[1]})' - qy^{[1]} + Cy$, где $y^{[1]} = y' - qy$ — квазипроизводная, и областью определения $D(S_\theta) = \{y \in H^1([0,\pi]) : y^{[1]} \in H^1([0,\pi]), y(\pi) = e^{i\theta}y(0), y^{[1]}(\pi) = e^{i\theta}y^{[1]}(0)\}$.

Для рассматриваемого оператора получены асимптотика собственных значений, а также оценки равномерной безусловной равносходимости спектральных разложений для свободного и возмущенного оператора.

Моделирование волн-убийц

Юдин А. В.

Российский университет дружбы народов (Москва, Россия)

Приближенные операторные методы для современных кластеров

Юнаковский А. Д.

Институт прикладной физики РАН (Нижний Новгород, Россия)

Переход к ЭВМ нового поколения всякий раз существенным образом меняет наши представления о математических моделях, вычислительных методах, алгоритмах и программах. Появление многопроцессорных компьютеров расширяет класс решаемых задач, но зачастую сужает область применимости известных популярных алгоритмов.

Важным является удобство и естественность распараллеливания вычислений, простота логической организации процесса вычислений и возможность быстрой визуализации.

Главный недостаток ЭВМ состоит в том, что каждая задача, для которой она может быть применена, должна быть приведена, часто довольно утомительным способом, к последовательности арифметических задач. С учётом больших затрат на программирование, окончательная оценка качества алгоритма должна определяться не только количеством времени расчёта на ЭВМ, но и затратами человеческого времени на программирование, отладку, тестирование и усовершенствование программы. Кроме того, работа программиста, отлаживающего большую программу, напоминает работу авиадиспетчера: и тот и другой должны обладать способностью видеть “картинку” целиком, интуитивно предвидя возможные осложнения.

Надо отметить, что сейчас появляются компиляторы "блок-схемного" типа, для которых просто рисуется схема соединения известных блоков (подпрограмм). Это ставит перед математиками задачу создания хорошо распараллеливаемых операторов, из которых можно достаточно легко "собирать"хорошую аппроксимацию исходной задачи.

Для того, чтобы продемонстрировать специфику задачи распараллеливания, естественно начать с классического контрпримера - метода Бунемана, обладающего высокой эффективностью (N log N операций), возможностью повышения точности аппроксимации за счет дополнительного применения "операторного компактного неявного"метода, НО до сих пор не распараллеленного. (Имеется в виду, что распараллелить сейчас можно любой цикл, но получить при этом выигрыш – далеко не всегда)

Одним из эффективных способов получения результатов на сложных компьютерных системах является метод “расщепления по физическим процессам”. Он состоит в сведении исходной эволюционной задачи, описывающей сложный физический процесс, к решению последовательности задач, описывающих процессы более простой физической природы. Приближённо это удаётся сделать на основе аддитивности рассматриваемых процессов в малом. Во второй лекции предполагается показать, что схема “расщепления по физическим процессам” строится путем последовательных операторных замен неизвестной функции на малом интервале. Как спектральные, так и сеточные методы, могут быть использованы для реализации отдельных операторов схемы расщепления. Этот путь позволяет наиболее просто сделать обобщения на случай многих пространственных переменных. При проведении замен на первом этапе мы стремимся осуществить переход от уравнения или системы уравнений с неограниченными по пространственным координатам операторами к уравнениям с ограниченными операторами. Такой переход существенно расширяет возможности последующего численного моделирования. Планируется показать эффективность осредненной операторной экспоненты.

Реализация схемы расщепления сводится к последовательному решению задач Коши для достаточно простых и, - что немаловажно, - знакомых уравнений. За начальные данные для последующего уравнения берутся результирующие значения предыдущего. Каждая из этих задач может быть решена отдельно. Необходимо следить лишь за тем, чтобы решение каждого из уравнений в схеме расщепления удовлетворяло граничным условиям исходного уравнения.

Цитируя доклад Ингрид Добеши на Международном конгрессе математиков в Цюрихе, 1999г., можно сказать: “У математиков есть разные способы оценки новых теорий и конструкций. Одним важным критерием является эстетика - некоторые разработки просто “ощущаются” правильными, подходящими и красивыми. ... Другим важным показателем ценности того или иного раздела математики является мера его полезности в приложениях; это почти единственный критерий, используемый нематематиками”.

На заданном малом отрезке $(t_0, t_0 + \Delta t)$ мы стремились построить такое приближенное решение задачи, которое кроме высокого порядка аппроксимации обладает ещё и тем свойством, что в начальной и конечной точках рассматриваемого интервала производные по времени приближенного решения совпадают с производными точного решения, определяемыми по исходному уравнению. Естественно, что в конечной точке $t_0 + \Delta t$ мы попадём на другую, близкую траекторию, но с производной, соответствующей именно этой траектории. При этом ошибка на шаге, т.е. разность между точным и приближенным решением обладает в начальной и конечной точках шага счета нулевой производной по времени. В сочетании с высоким порядком аппроксимации это свойство, как и при сплайн - аппроксимации, существенно уменьшает накопление ошибки.

“У нас жалуются на неэффективность использования вычислительной техники. Как правило, вина сваливается на недостаточность программного обеспечения. Но если проанализировать ситуацию внимательнее, то обнаружится, что причина кроется в отсутствии алгоритмического обеспечения. При наличии алгоритмов разработка программы - это уже вопрос времени, но без алгоритмов сдвинуться с места вообще нельзя.”[1]

В лекции отражено стремление получить просто реализуемый алгоритм, хотя способ его получения может оказаться достаточно сложным. Однако весьма важным является то, что понимание этих алгоритмов не вызывает затруднений. Они легко программируются и просты в употреблении. Простота реализации существенно ускоряет процесс написания программ, сокращает число ошибок программирования и в конечном итоге быстрее приводит к успеху.

Планируется привести пример, когда применение операторного подхода позволило найти структуры в хаосе. Также планируется привести пример "невычислимой"эволюции в задаче с непрерывным спектром.

В конце лекций планируется рассказать о том, что в связи с возросшими возможностями компьютеров можно реализовывать алгоритмы с лишними дополнительно введенными величинами, позволяющими увеличить точность вычислений, добиться сохранения инвариантов задачи и рассмотреть сложные режимы работы таких установок, как, например, лазер на свободных электронах.

Планируется пример четырехпоточного вычислительного процесса, заменяющего сложный ветвящийся алгоритм.

Методы моделирования для обоснования управленческих решений

Юнеева О. Д.

Кубанский государственный университет (Краснодар, Россия)

Обратная задача для дифференциальных пучков на полуоси

Юрко В. А.

Саратовский госуниверситет (Россия)

Рассмотрим краевую задачу L вида

$$\ell y := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x > 0, \quad q(x) \in L(0,\infty), \tag{1}$$

$$U(y) := P_1(\lambda)y'(0) - P_0(\lambda)y(0) = 0,$$

$$P_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{p_k} P_{kj}\lambda^{p_k - j}, \quad k = 0,1, \quad p_k \geq 0,$$

с комплексными $q(x), P_{kj}$, причем $P_1(\lambda)$ и $P_0(\lambda)$ не имеют общих нулей. Пусть для определенности $p_1 = p_0$, $P_{10} = 1$. Через $Z_k = \{z_{ks}\}_{s=\overline{1,p_k}}$ обозначим нули $P_k(\lambda)$, $k = 0,1$. Положим $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Im}\rho \geq 0$. Пусть $\Phi(x,\lambda)$ – решение уравнения (1) при условиях $U(\Phi) = 1$, $\Phi(x,\lambda) = O(\exp(i\rho x))$, $x \to \infty$. Функция $M(\lambda) := \Phi(0,\lambda)$ называется *функцией Вейля* для L.

Пусть Z_k, $k = 0,1$ известны и фиксированы. Обратная задача формулируется следующим образом.

Обратная задача. Задана функция Вейля $M(\lambda)$, построить потенциал $q(x)$ и коэффициент P_{00}.

Теорема 1. *Задание функции Вейля $M(\lambda)$ однозначно определяет q и P_{00}.*

Метод доказательства является развитием метода спектральных отображений [1] и дает конструктивную процедуру решения обратной задачи, а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Для случая простого

[1]Дородницын А.А. Информатика: предмет и задачи. - Природа, 1985. No 2, с. 26 - 29.

спектра получено также решение обратной задачи по спектральным данным $S := (\{V(\lambda)\}_{\lambda>0}, \{\lambda_k, \alpha_k\}_{k=\overline{1,m}})$, которые описывают поведение непрерывного и дискретного спектров задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

ЛИТЕРАТУРА

1. Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* - М.: Физматлит, 2007.

Применение векторной формулы Кирхгофа в расчете динамики заряженных пучков

Ильенко К., Яценко Т.

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины (Харков, Украина)

Дарвиновская квазистатика является стандартных подходом при расчетах динамики пучков заряженных частиц, принимающий во внимание, как умеренно релятивистские поправки в собственное электрическое поле, так и собственное магнитное поле пучка. В этом приближении нами была доказана векторная формула Кирхгофа, позволяющая аналитически выделить сингулярность вида $1/r^2$ и ускорить сходимость остатка при дальнейшем использовании метода функций Грина. Таким образом, собственные электрические и магнитные поля, создаваемые умеренно релятивистским пучком заряженных частиц, представляются в виде суммы электрического и магнитного полей в свободном пространстве и электрического и магнитного полей, создаваемых поверхностными зарядами и токами, наведенными пучком на стенках цилиндрической камеры дрейфа.

On Fractional Bessel Heat Kernel

Abdel-Rady A. S.

South Valley University (Qena, Egypt)

In this article we study the fractional heat equation $\frac{\partial}{\partial t}\nu(x,t)+(-\Delta)^{\alpha/2}\nu(x,t) = 0$, in $\mathbb{R}^2 \times (0;\infty)$, $0 < \alpha < n$, with initial condition $\nu(x,0) = f(x)$, for $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ for $x \in \mathbb{R}^n$ and the operator Δ denotes the Laplace operator. The solution and the fractional Bessel heat kernel are obtained. Also a generalized fractional Bessel kernel is defined and obtained.

On the Vershik-Kerov Conjecture Concerning the Shannon-McMillan-Breiman Theorem for the Plancherel Family of Measures on the Space of Young Diagrams

Bufetov A. I.

Steklov Institute of Mathematics (Moscow, Russia)

Vershik and Kerov conjectured in 1985 that dimensions of irreducible representations of finite symmetric groups, after appropriate normalization, converge to a constant with respect to the Plancherel family of measures on the space of Young diagrams. The statement of the Vershik-Kerov conjecture can be seen as an analogue of the Shannon-McMillan-Breiman Theorem for the non-stationary Markov process of the growth of a Young diagram. The limiting constant is then interpreted as the entropy of the Plancherel measure. The main result of the paper is the proof of the Vershik-Kerov conjecture. The argument is based on the methods of Borodin, Okounkov and Olshanski.

The talk is based on the preprint arXiv:1001.4275.

About basicity personal function of basicity correct regional task for differential equation in interval

Eleuov A. A., Kanguzhin B. E.

Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

In the work [1], was given opportunity decomposition of function from some functional space on personal and associate function of differential operator L which, begeted in functional space $L_2[0,b]$ where $b<\infty$ linear differential expression with variable coefficient

$$Ly = l(y) \equiv y^{(n)}(x) + p_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x), \tag{1}$$

with single limitation (1) resolvent multitude of operator L – nonempty multitude. Without community we will suppose, that, complex digit 0 belong to resolvent multitude of operator L. Coefficients of expression $l(.)$ satisfied condition

$$p_0(x) \in \mathrm{C}[0,b],\ p_1(x) \in \mathrm{C}^1[0,b],\ \ldots,\ p_{n-2}(x) \in \mathrm{C}^{(n-2)}[0,b]. \tag{2}$$

According to theorem M. Otelbaev [2] range of definition of this operator described by help collection of n function $\sigma_1(.),\ldots,\sigma_n(.)$ from this space $L_2[0,b]$

$$D(L) = \left\{ y(x) \in W_2^n[0,b] : y^{(\nu)}(0) = \langle l(y)\rangle; \sigma_{\nu+1},\ \nu = 0,\ldots,n-1 \right\}, \tag{3}$$

where $W_2^n[0,b]$ – space of S.L. Sobolev, $\langle f;g\rangle$ – scalar product of spaces $L_2[0,b]$ boundary function $\sigma_1, dots, \sigma_n$ was selected from spaces $L_2[0,b]$ thus, boundary forms $\mathrm{U}_1(y)$ accepted this type

$$\mathrm{U}_j(y) = \mathrm{V}_j(y) + \langle l(y); \sigma_j^1(x)\rangle, \tag{4}$$

where

$$\mathrm{V}_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_{jk} y^{(k)}(0) + \beta_{jk} y^{(k)}(b) \right).$$

It is enough for this that $\sigma_1(x)$ has presentation

$$\sigma_j(x) = \sigma_j^0(x) + \sigma_j^1(x), \tag{5}$$

where bearer σ_j^1 lied in $(0,b)$, $\sigma_j^0(.)$ – solution homogeneous equation $l^*(y) = 0$. Corresponding of formal conjugate expression $l(y) = 0$. In this situation coefficients β_{jk} offer to the mean of the $\sigma_j^0(x)$ function and its derivative in point $x = b$, and coefficients α_{jk} present mean of the function $\sigma_j^0(x)$ and its derivative in point $x = 0$, weather differ from the to ± 1. Now, we are ready formulate the result of the article.

Theorem 1. System of personal and adjoint function of operator L with regular regional conditions (4), (5) constitute basis of Riss with brackets in the space $L_2[0,b]$. In particular, if regional conditions strenuously regular, then system of personal and adjoint functions of the operator L constitute the basis of Riss in $L_2[0,b]$.

References

[1] Kanguzhin B.E., Sadybekov M.A. Differential operators in the interval. Distribution of personal meanings. – Shymkent: Galym, 1996, 270 pp.

[2] Otelbaev M.O. About correct tasks as Bycadze-Samarskii // USSR. 1982, V. 265, No 4, Pp. 815-819.

On solvability of second order differential equations and inclusions on flat torus

Filchakov S. V.

Kursk branch of Russian State Trade-Economical University (Kursk, Russia)

We investigate second order differential equations and inclusions on the group $D^s(\mathcal{T}^n)$ of Sobolev H^s-duffeomorphisms of flat n-dimensional torus $\mathcal{T}^n$, $s > \frac{n}{2} + 1$.

Besides the group structure mentioned above, on $D^s(\mathcal{T}^n)$ there exists an additional structure generated by the global parallelism of the tangent bundle on $\mathcal{T}^n$. This structure is the main technical tool of our consideration.

Definition 1. *Introduce the operators:*

(i) $B : T\mathcal{T}^n \to R^n$*, the projection to the second factor in* $T\mathcal{T}^n = \mathcal{T}^n \times R^n$*;*

(ii) $A(m) : R^n \to T_m\mathcal{T}^n$*, the inverse to* B *(see (i)) mapping to the tangent space to* $\mathcal{T}^n$ *at* $m \in \mathcal{T}^n$*;*

(iii) $Q_g = A(g(m)) \circ B$*, a linear isomorphism* $Q_g : T_m\mathcal{T}^n \to T_{g(m)}\mathcal{T}^n$*, where* $g \in D^s$ *and* $m \in \mathcal{T}^n$ *.*

The operator Q_e is a one, different from the right shift, that sends every tangent space to the group isomorphically to the tangent space at the unit e. Thus, besides the right-invariant vector fields on $D^s(\mathcal{T}^n)$ there is another class of fields with a property of invariance, this time with respect to the action of operator Q. We call these fields parallel.

Definition 2. *A vector filed* X *on* $D^s(\mathcal{T}^n)$ *is called parallel if at every point* $\eta \in D^s(\mathcal{T}^n)$ *its value* $X_\eta = Q_\eta X_e$ *where* $X_e \in T_e D^s(\mathcal{T}^n)$*.*

Note that the parallel vector field X is invariant with respect to Q_θ for every $\theta \in D^s(\mathcal{T}^n)$.

Theorem 1. *Let the set-valued force field* $F : [0, l] \times TD^s(\mathcal{T}^n) \to TD^s(\mathcal{T}^n)$ *with convex images satisfy the upper Caratheodory condition and be such that for almost all* t *the map* $A : [0, l] \times TD^s(\mathcal{T}^n) \to T_e D^s(\mathcal{T}^n)$ *of the form* $A(t, X) = Q_e F(t, X)$ *is* k*-bounded with respect to the measures of non-compactness* α_d *and* $\alpha_{\|\cdot\|}$ *with the coefficient* $g(t)$*. Then for almost all* t *the vector field* $\bar{S} + \bar{F}^l$ *is locally* k*-bounded on a small enough neighborhood* U *in* $TD^s(\mathcal{T}^n)$ *with respect to the measures of non-compactness* $\alpha_{|||\cdot|||}$ *.*

On boundary value problem for mixed type equation

Kapustina T. O.

Moscow State University (Russia)

This work is devoted to one singularly perturbed boundary value problem for elliptic–parabolic equation. The problem is considered without concordance conditions concerning boundary value and coefficients of the equation. The aim is to obtain asymptotic representation of the solution and to estimate the approximation error. Asymptotic methods used in the theory of singularly perturbed differential equations are the basic means of this research.

Attractors for systems describing viscoelastic flows

Karazeeva N. A.

Steklov Mathematical institute, S-Petersburg Dep. (S-Petersburg, Russia)

Initial boundary value problems with Dirichlet boundary condition for equations, describing motions of Kelvin-Voight fluids with infinite number of relaxation and retardation times are considered. Global in time solvability of such initial boundary value problems is investigated. Furthermore the existence of the attracting sets for such systems is proved and some properties of such sets (compactness, finite dimensionality) are researched.

On Nonnegative Selfadjoint Extensions of the Operators Given in Divergence Form

Kovalev Yu.

Vladimir Dal East-Ukrainian National University (Lugansk, Ukraine)

Let H be a separable Hilbert space. We considered the problem of characterizations of the Friedrichs and Kreĭn nonnegative selfadjoint extensions for densely defined operators of the form $\mathcal{A} = L_2^* L_1$, where L_1 and L_2 are densely defined and closed operators in H taking values in a Hilbert space $\mathfrak{H}$ and possessing the property $L_1 \subset L_2$. Such kind of operators $\mathcal{A}$ we call *operators in divergence form.* Some conditions for the equality $(L_2^* L_1)^* = L_1^* L_2$ are obtained. We establish that under the condition $\mathcal{A}^* = L_1^* L_2$ the Friedrichs and Kreĭn extensions of $\mathcal{A}$ are given by the operators

$$\mathcal{A}_F = L_1^* L_1 \text{ and } \mathcal{A}_K = L_2^* P_{\overline{\operatorname{ran}}\,(L_1)} L_2.$$

We give parametrization of all nonnegative selfadjoint extensions of operators A_0, A', and H_0 by means of boundary triplet $\Pi = \{\mathcal{H}, \Phi, \Gamma\}$ for a pair of operators $L_1 \subset L_2$:

$$\mathcal{A}_\Theta := \mathcal{A}^* \upharpoonright \{f \in \operatorname{dom} \mathcal{A}^* : \ (\Gamma f, \Phi P_{\overline{\operatorname{ran}}\, L_1} L_2 f) \in \Theta\},$$

where Θ nonnegative selfadjoint linear relations in $\mathcal{H}$.

For a pair $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0^*$, where $\mathcal{L}_0$ maximal symmetric operator, we prove that if $(\mathcal{L}_0^2)^* = \mathcal{L}_0^{*2}$, then $(\mathcal{L}\mathcal{L}_0)^* = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}$ and $(\mathcal{L}_0\mathcal{L})^* = \mathcal{L}\mathcal{L}_0^*$ for an arbitrary selfadjoint extension $\mathcal{L}$ of $\mathcal{L}_0$.

Our main results are applied to the following differential operators in the Hilbert space $L_2(\mathbb{R})$:

$$\operatorname{dom}(A_0) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}) : f(y) = 0,\ y \in Y\},\ A_0 := -\frac{d^2}{dx^2},$$
$$\operatorname{dom}(A') = \{g \in W_2^2(\mathbb{R}) : g'(y) = 0,\ y \in Y\},\ A' := -\frac{d^2}{dx^2},$$
$$\operatorname{dom}(H_0) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}) : f(y) = 0,\ f'(y) = 0,\ y \in Y\},\ H_0 := -\frac{d^2}{dx^2}.$$

Here $W_2^1(\mathbb{R})$ and $W_2^2(\mathbb{R})$ are Sobolev spaces, Y is finite or infinite monotonic sequence of points in $\mathbb{R}$, satisfying the condition $\inf\{|y' - y''|,\ y', y'' \in Y,\ y' \neq y''\} > 0$. The operators A_0, A', and H_0 are densely defined and nonnegative with finite (the set Y is finite) or infinite defect indices (the set Y is infinite) and are basic for investigations of Hamiltonians on the real line corresponding to the δ, δ' and $\delta - \delta'$ interactions, respectively, [1].

References

[1] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hϕegh-Krohn, and H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, New York

To the spectral theory of Schredinger operator with infinitely many point interactions

Malamud M. M.

Donetsk National University (Ukraine)

We will discuss different spectral properties of 3D Schredinger operator with point interactions. In particular, the absolutely continuous and point spectra will be discussed.

Statistical software package Stata and its application in econometric analysis

Marchenko Yu.

StataCorp LP (Texas, USA)

Two problems on coloring of $\mathbb{R}^2$

Protasov I. V.

Kyiv National University (Ukraine)

Problem 1. Can the plane $\mathbb{R}^2$ be colored in three colors 1, 2 and 3 so that each horizontal line $y = a$ has finitely many points of color 1, each vertical line $x = a$ has finitely many points of color 2, and each "diagonal"$y = x + a$ has finitely many points of color 3?

Problem 2. Does there exist a finite subset F of $\mathbb{R}^2$, $|F| = n$, $n > 1$ and an n-coloring of $\mathbb{R}^2$ such that the image of F under each isometry of $\mathbb{R}^2$ contains a point of each color?

Classical solutions of the Vlasov–Poisson equations in a half-space

Skubachevskii A. L.

Peoples' Friendship University of Russia (Moscow, Russia)

We consider the Vlasov system of equations describing the evolution of distribution functions of the density for the charged particles in a rarefied plasma. We study the Vlasov system in $\mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^3$ with initial conditions for distribution functions $f^\beta\big|_{t=0} = f_0^\beta(x,p)$, $\beta = \pm 1$, and the Dirichlet or Neumann boundary conditions for the potential of an electric field for $x_1 = 0$, where $f_0^\beta(x,p)$ is the initial distribution function (for positively charged ions if $\beta = +1$ and for electrons if $\beta = -1$) at the point x with impulse p, $\mathbb{R}^3_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 > 0\}$. Assume that initial distribution functions are sufficiently smooth and $\operatorname{supp} f_0^\beta \subset (\mathbb{R}^3_\delta \cap B_\lambda(0)) \times B_\rho(0)$, $\delta, \lambda, \rho > 0$, and the magnetic field $H(x)$ is also sufficiently smooth and has a special structure near the boundary $x_1 = 0$, where $\mathbb{R}^3_\delta = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 > \delta\}$. Then we prove that for any $T > 0$ there is a unique classical solution of the Vlasov system in $\mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^3$ for $0 < t < T$ if $\|f_0^\beta\| < \varepsilon$, where $\varepsilon = \varepsilon(T, \delta, \rho, \|H\|)$ is sufficiently small.

This work was supported by the RFBR (grants No. 10-01-00395 and No. 09-01-00586) and the analytical departmental special-purpose program "Development of Scientific Potential of Higher Education" (No. 2.1.1/5328).

Abstract approach to extreme subspaces and corresponding factorizations

Tikhonov A.

Taurida National University (Simferopol, Ukraine)

Let H be a Hilbert space. We consider a binary relation $\mathcal{X}(S) \subset H \times H$ for operator $S \in [H]$ with the following properties:

1) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$, $< f_1, g > \in \mathcal{X}(S)$, $< f_2, g > \in \mathcal{X}(S) \Longrightarrow < \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g > \in \mathcal{X}(S)$;
2) $< f, g > \in \mathcal{X}(S) \Longrightarrow < (S-\lambda)^{-1} f, g > \in \mathcal{X}(S)$, $\lambda \in \rho(S)$;
3) $< f, g > \in \mathcal{X}(S) \Longleftrightarrow < f, P_f g > \in \mathcal{X}(S)$,

where P_f is orthoprojector on $H_f = \bigvee\limits_{\lambda \in \rho(S)} (S-\lambda)^{-1} f$ and define the lineal $\widetilde{X}(S) = \{ f \in H : \forall g \in H \; < f, g > \in \mathcal{X}(S) \}$ and corresponding subspace $X(S) = \operatorname{clos} \widetilde{X}(S)$.

We study some extreme properties of $X(S)$ and develop abstract framework in which we reveal additional assumptions that allow to establish extreme (like J-inner-outer, A-regular-singular) factorization for corresponding characteristic functions.

The theory of extremals' fields for multiple integrals

Zelikin M. I.

Moscow State Uneversity (Moscow, Russia)

New construction in the theory of fields for multiple integrals are designed. Generalization of the Legendre-Weyl-Caratheodory transforms and corresponding invariant integrals are introduced and explored. Connection and curvature of bundles induced by a field of extremals are calculated.

Список авторов

Конференция проводится ежегодно с 17 по 29 сентября, в п. Батилиман (Южный берег Крыма, залив Батилиман, район национального ландшафтного заповедника “Мыс Айя”).

Ежегодно издаются Труды КРОМШ (выпуски журнала “Spectral and Evolution Problems”), аннотации лекций и статьи участников конференции публикуются в научных журналах Украины и России. Требования к оформлению аннотаций и статей в Труды КРОМШ-2011 будут опубликованы на официальном сайте конференции **www.kromsh.info**.

Официальные языки конференции: украинский, русский, английский.

Заявки на участие в работе КРОМШ-2012 принимаются до 1 июля 2012 года через официальный сайт конференции **www.kromsh.info**.

Обязательное подтверждение участия с датами приезда и отъезда необходимо прислать с 20 августа по 5 сентября 2012 года по адресу **kromsh@mail.ru**.

Оргкомитет КРОМШ

Копачевский Николай Дмитриевич (kopachevsky@list.ru)

Марянин Борис Давыдович
Муратов Мустафа Абдурешитович (mustafa_muratov@mail.ru)
Орлов Игорь Владимирович (igor_v_orlov@mail.ru)
Пашкова Юлия Сергеевна (j_pashkova@mail.ru)
Смирнова Светлана Ивановна (old@crimea.edu)
Старков Павел Александрович (pavelstarkov@list.ru)
Войтицкий Виктор Иванович (victor.voytitsky@gmail.com)